Тема занятия №1: ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ, СВОЙСТВА. ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.

План:

1. **Определение функции.**
2. **Способы задания функции.**
3. **График функции.**
4. **Свойства функций.**
5. **Основные элементарные функции и их графики.**

Содержание материала:

Функцией f называется множество упорядоченных пар чисел *(x,y),* таких, что *x* **€***X, y* **€***Y* и каждому элементу *x* из множества *X* ставится в соответствие единственный элемент *y* из множестваY. Множество *X* называется *областью определения* функции *f* , а множество Y - *областью значений.* Обозначают: *D(f)* и *E(f).* Функция обозначается *y=f(x).* Элемент *x* называется *аргументом, а y - значением* функции *f* .

Существуют разные способы задания функций:

1. Аналитический способ.

Аналитический способ - это наиболее часто встречающийся способ задания функции.

Заключается он в том, что функция задается формулой, устанавливающей, какие операции нужно произвести над х, чтобы найти у.

Например. $y = x^2 - 2$, $y = 3\ln x$, $y = \sin 2x$

Рассмотрим первый пример $y = x^2 - 2$. Здесь значению х = 1 соответствует $y = 1^2 - 2 = -1$, значению х = 3 соответствует $y = 3^2 - 2 = 7$ и т. д.

2. Графический способ состоит в изображении *графика функции* - множества точек *(x,y)* плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента *x,* а ординаты - соответствующие им значения функции *y = f(x).* Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком - его неточность.

3. Логический способ.

Если функция описывается правилом ее составления, например, функция Дирихле:

f (*x)*= 1, если *x* - рациональное; *f* (*x)*= 0, если *x* -иррациональное.

4. Табличный способ.

Табличный способ наиболее удобен, когда множество X конечно. При этом способе составляется таблица, в которой каждому элементу из множества X, ставится в соответствие число Y.

Табличный способ задания функции очень удобен при обработке результатов исследований.

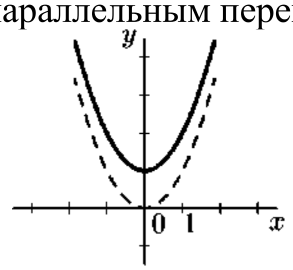
График функции

Графиком функции (в декартовой прямоугольной системе координат) называют значения независимой переменной, а ординаты - соответствующими значениями функции.

Преобразования графиков функций.

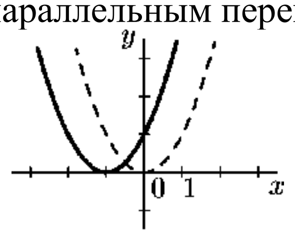
Покажем, как из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики функций вида $y = Af(ax + b) + B$, где A, B, a, b - некоторые действительные числа.

1. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом.



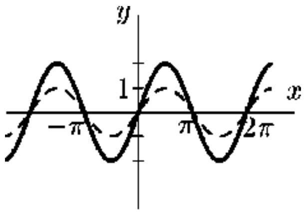
Если $b > 0$, то перенос совершается параллельно оси ординат на расстояние b вверх, а если $b < 0$, то вниз на расстояние $|b|$. На рис. изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = x^2+1$ (сплошной линией).

2. График функции $y = f(x + a)$ также получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом.



Если $a > 0$, то график переносится параллельно оси абсцисс влево на расстояние a, а если $a <0$, то вправо на расстояние $|a|$. На рис. изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = (x +1)^2$ (сплошной линией).

3. График функции $y = Af(x)$, где $A > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением или сжатием вдоль оси ординат.



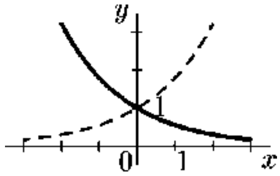
Если $A>1$, то график функции растягивается вдоль оси Oy в A раз, а если $0<A<1$, то сжимается в 1/A раз. На рис. изображены графики функций $y = \sin x$ (пунктирной линией) и $y = 2 \sin x$ (сплошной линией).

4. График функции $y = f(ax)$, где $a > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием к оси ординат или растяжением вдоль оси абсцисс. График функции $y = f(ax)$ есть график $y = f(x)$, сжатый (при $a > 1$) в a раз или растянутый (при $0 < a < 1$) вдоль оси Ox.

5. График функции $y = -f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс.

На рис. изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = -x^2$ (сплошной линией).

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси ординат.



На рис. изображены графики функций $y = a^x$, где $a > 0$ (пунктирной линией) и $y = a^{-x}$ (сплошной линией).

4. Свойства функций

Под основными свойствами функции $y = f(x)$ будем понимать следующие: *четность, нечетность*. Функция $y = f(x)$ называется *четной,* если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$ и *нечетной,* если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида.* График четной функции симметричен относительно оси ординат (например, график функции $y = x^2$), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (например, график функции $y = x^3$). Поэтому для четной функции достаточно строить лишь правую половину графика $(x \geq 0)$, левая половина его $(x \leq 0)$ является зеркальным отражением правой относительно оси Oy. Чтобы построить график нечетной функции, достаточно изобразить правую половину его $(x \geq 0)$; левая половина графика $(x \leq 0)$ получается в результате поворота правой на 180°.

монотонность. Если для любых значений $x_1, x_2 e X$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *возрастающей;*

$f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *неубывающей;*

$f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *убывающей;*

$f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей.*

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве X называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие - *строго монотонными* Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности.*

ограниченность. Функция называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $\backslash f(x) < M \backslash$ для любого $x \in X$.

периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической,* если существует положительное число T такое, что $f(x + T) = f(x)$. Наименьшее число с таким свойством называется *периодом* функции. Для построения графика периодической функции достаточно изобразить его на отрезке, длина которого равна периоду, а затем построить периодическое продолжение графика.

5. Обратная функция

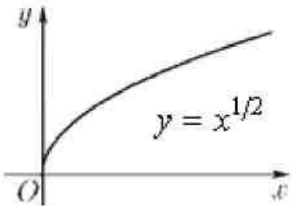
Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению y € E соответствует единственное значение x€D, то определена функция $x = \varphi(y)$ *с* областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде: $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

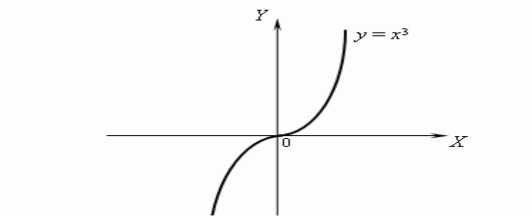
Основные элементарные функции и их графики.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

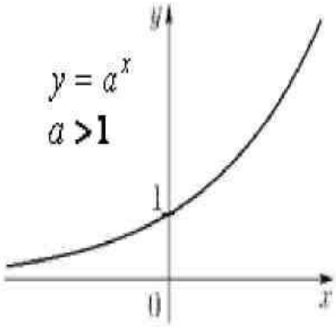
Постоянная функция $y = C$, где $C€R$ - постоянное число. График этой функции есть прямая, параллельная оси *Ox,* находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси *Ox* и расположенная выше оси *Ox,* если $C > 0$, и ниже оси *Ox,* если $C < 0$.

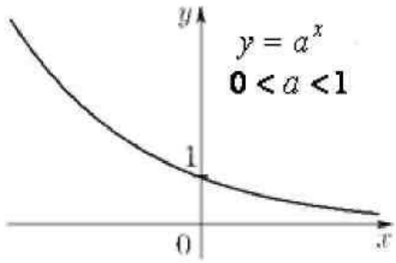
Степенная функция $y = x^a$, где $a €R$ - постоянное число. При $a > 0$ эта функция определена на всей действительной прямой. При $a < 0$ она определена на всей действительной прямой, за исключением точки $x = 0$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, приведены на рис. 12.





Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a≠1$). На рис. изображены графики показательных функций, соответствующие основаниям $a > 1$ и $0<a<1$





Логарифмическая функция $y = log_a x$ ($a > 0$, $a≠1$). Эта функция является обратной для показательной функции $y = a^x$. Графики логарифмических функций, соответствующие основаниям $a>1$ и $0<a<1$, изображены на рис.

Тригонометрические функции y =sin x, y =cos x, y=tg$x$, y=ctgx

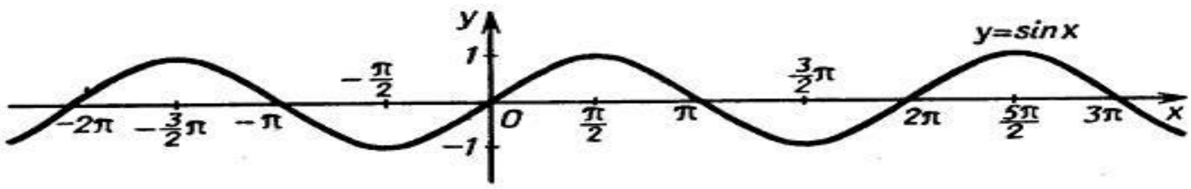
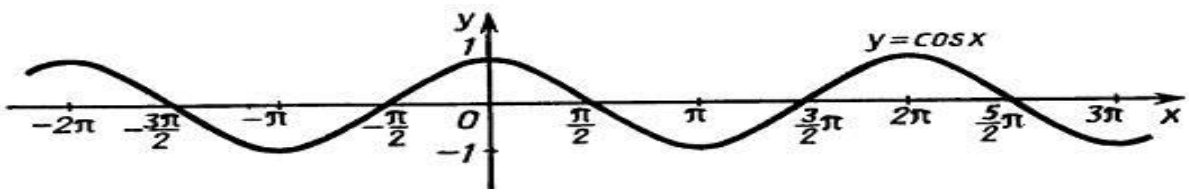
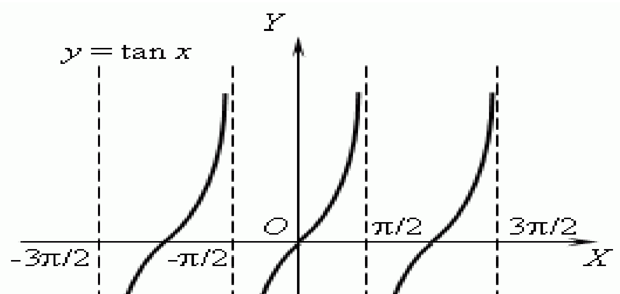
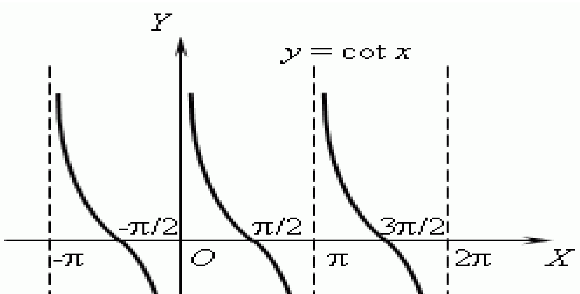


Рис. 8

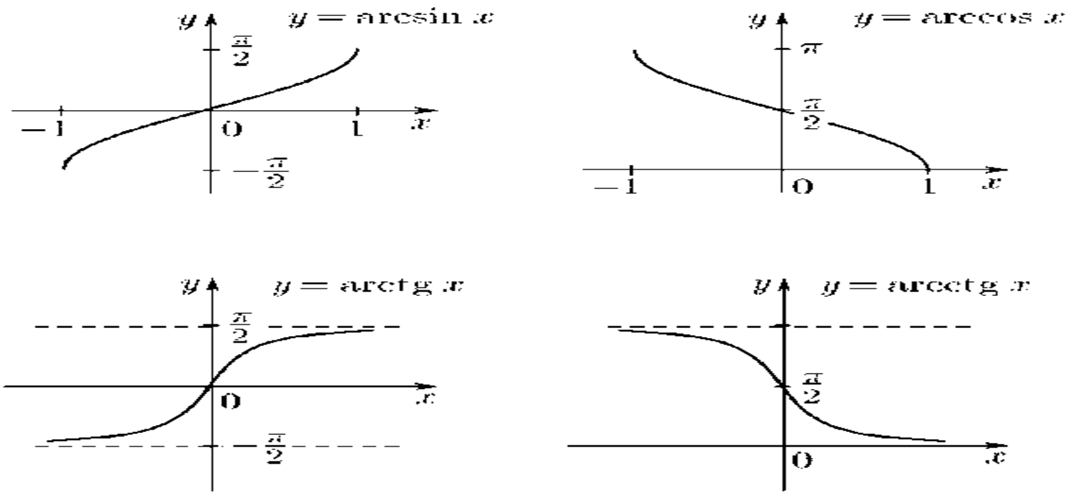
Рис.







__Обратные тригонометрические функции__: *y* = arcsin *x*, *y* =arccosx, y=arctgx, y=arcctgx



Тема занятия № 2: **Дифференциальное исчисление. Производная функции, её геометрический и физический смысл, производная сложной и обратной функций.**

План:

1. Определение производной, ее геометрический и физический смысл.
2. Непрерывность и дифференцируемость функции.
3. Правила вычисления производных.

1.Определение производной, ее геометрический и физический смысл:

Пусть дана функция y=f(x). Разность $x-x_0$, называется приращением аргумента и обозначается $\Delta x= x-x_0$. Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции и обозначается Δy

Определение: Производной **y** или **f(x)** от данной функции **y=f(x)** называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю: $y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$**.**

Пример. $f(x) = x^2$, имеем: $\Delta f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x;\ f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

Обозначается производная $f'(x)$. Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием.**

Понятие о производных высших порядков:

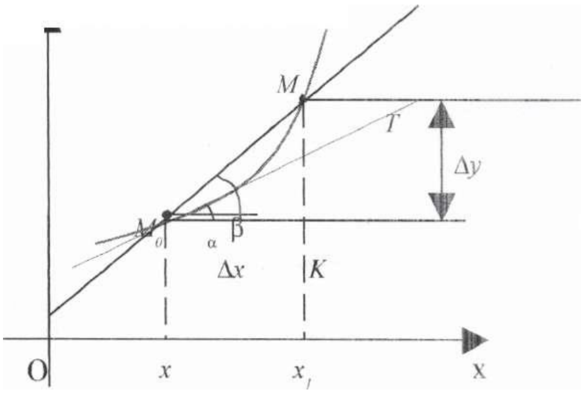
Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$ т.е. $f''(x)= (f'(x))'$

Аналогично определяется производная $f^{(n)}(x)$ любого порядка n=1, 2, ….;

Замечание: Когда говорят, что f имеет в точке x_0 производную порядка n, то значит, что в некоторой окрестности точки x_0 функции f существует все производные низших порядков.

Понятие производной - основное понятие математического анализа. К понятию производной приходится обращаться при решении целого ряда задач физики, механики, геометрии, экономики и ряда других областей.

Выясним **<u>геометрический смысл производной</u>**. Решим следующую задачу: найдем уравнение касательной к графику функции *y=f(x)* в произвольной его точке *Mo(xo, yo).* Касательная к произвольной кривой (графику) в некоторой ее точке M_0 определяется следующим образом: возьмем на кривой соседнюю точку Mi, проведем через точки M_0 и M1 секущую, и будем приближать точку M1 к точке Mo, двигаясь по кривой; предельное положение M_0T (если оно существует) секущей Mo *M1***,** когда точка M1 сольется с точкой Mo, и определит касательную к данной кривой в точке M_0**.**



Итак, касательной к данной кривой в некоторой ее точке M_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через точку M_0 и соседнюю точку кривой M1, при условии, что точка M1, двигаясь по кривой, стремится слиться с точкой M_0.

Итак, точка Mo(xo, yo=f(xo)), точка M $(x_1 = x_0 + \Delta x; y_1 = f(x_0 + \Delta x))$.

Угловой коэффициент секущей k, равный тангенсу угла β ее наклона к оси Ox, определится так:

$k - tg\beta = \dfrac{KM_1}{M_0K}$ но $KM_1 = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0); M_0K = \Delta X;$ *поэтому*

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Когда точка M_1 стремится к точке M_0, а секущая $M_0\ M_1$, стремится занять положение

касательной M_0T, то угол β наклона секущей $M_0\ M_1$ к оси Ox стремится к углу α (наклона

M_0T к. оси Ox), а $tg\beta$ стремится к tgα (тангенс - функция непрерывная).

Но, когда точка M_1, стремится к точке M_0, $\Delta x \to 0$, $k_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ или, по определению производной, $k_0 = f(x_0)$.

Получим теперь уравнение касательной *MoT* как уравнение прямой, проходящей через заданную точку графика $M_0(x_0, y_0)$, угловой коэффициент которой $k_0 = f(x_0); y - y_0 = k_0 \times (x - x_0); y - f(x_0) \times (x - x_0)$.

Геометрический смысл производной заключается в том что, производная от данной функции $f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в соответствующей точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Отсюда следует, что $f^{/}(x)$=R=tgα.

Физический смысл производной заключается в том, что производная от пути по времени есть скорость. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону s=s(t), где s- путь, проходимый точкой за время t. Тогда скорость v этого движения есть v=$s^{/}$(t).

Ускорение прямолинейного движения точки есть производная скорости по времени a=$v^{/}(t) = (s^{/})^{/} = s^{//}(t)$

2.<u>Непрерывность и дифференцируемость *функции:*</u>

Итак, $y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Но этот предел существует не для всякой функции, а если и существует, то не обязательно при всех значениях ее аргумента, при которых функция определена.

Определение. Функция, имеющая в данной точке $x = x_0$ производную, называется дифференцируемой в этой точке.

Определение. Функция, имеющая производную во всех точках интервала (а, Ь), называется дифференцируемой в этом интервале.

<u>Теорема.</u> Если функция y=f(x) дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке xo приращение Δx не равное нулю. Ему соответствует приращение функции. Рассмотрим очевидное тождество:

$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \Delta x$. Перейдем к пределу: $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} \times \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f \cdot (x_0) \times 0 = 0$

откуда и следует непрерывность функции в точке x_0 (функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции). Итак, необходимым условием дифференцируемости функции является ее непрерывность, то есть всякая дифференцируемая функция непрерывна. Обратное - неверно: не всякая непрерывная функция дифференцируема.

Пример: $y = \sqrt[3]{x}$; функция непрерывна на всей числовой оси, но в точке x=0 не имеет производной.

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

3. <u>Правила вычисления производных:</u>

1. Производная постоянной равна нулю $(C)' = 0$

2. Если функции U и V дифференцируемы, то их сумма и разность дифференцируемы по правилу: $(U+V)' = U' + V'$; $(U-V)' = U' - V'$;

3. Если функции U и V дифференцируемы, то их произведение дифференцируемо по правилу: $(UV)' = U'V+UV'$.

4. Если функции U и V дифференцируемы и функция V не равна нулю, то частное $\frac{U}{V}$ дифференцируемо по правилу: $(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

5. Постоянный множитель выносят за знак производной: $(CU)' = CU'$

Тема занятия №_3: Таблица производных. Производная сложной и обратной функции.

План:
1. Таблица производных.
2. Производная сложной и обратной функции.

1.<u>Таблица производных основных функций.</u>

1. $(C)' = 0.$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$
3. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a,$

   $(e^{x})' = e^{x}.$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},$

   $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

2.<u>Производная обратной функции:</u>

Определение: Пусть X и Y – некоторые множества и пусть задана функция f, т.е. множество пар чисел (x;y) ($x \in X$; $y \in Y$). Если в этом множестве x и y поменять местами, то получим множество (y;x), которое называется обратной функцией h к функции f

Обратную функцию будем обозначать символом x = h(y).

Из определения следует, что если обратная функция однозначна, то множество значений У функции f является областью определения обратной функции h, а область определения X функции f – множеством значений обратной функции h.

Теорема1: Если функция У= f(x) определена, строго монотонна и непрерывна на некотором промежутке X и пусть У – множество ее значений, то на множестве У обратная функция h(x) однозначна, строго монотонна и непрерывна.

Теорема2: Если функция y=f(x) имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция x = h(y) также имеет в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ производную, причем

$$h'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

3.Производная сложной функции:

Определение: Если на некотором промежутке x определена функция y= f(u) с множеством значений y, а на множестве y определена функция y = u(x), то функция y = f(u(x)) называется сложной функцией.

Производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$y' = f'(u(x))u'(x).$$

Пример:

Вычислить производную функции $y=(2x+5)^{100}$, данная функция является сложной.

$y' = ((2x+5)^{100})' = 100(2x+5)^{99}(2x+5)' = 200((2x+5)^{99}$

Таблица производных сложной функции:

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$\left(\sqrt[\alpha]{u}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[\alpha]{u^{\alpha-1}}} \cdot u'$$

$$\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$$

$$\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u'$$

$$\left(\log_a |u|\right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\lg |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$$

$$(\mathrm{Sin}(u))' = \mathrm{Cos}(u) \cdot u'$$

$$(\mathrm{Cos}(u))' = -\mathrm{Sin}(u) \cdot u'$$

$$(\mathrm{tg}(u))' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2(u)} \cdot u'$$

$$(\mathrm{ctg}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{Sin}^2(u)} \cdot u'$$

$$(\arcsin(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\arccos(u))' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\mathrm{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\mathrm{arcctg}(u))' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\mathrm{sh}(u))' = \mathrm{ch}(u) \cdot u'$$

$$(\mathrm{ch}(u))' = \mathrm{sh}(u) \cdot u'$$

$$(\mathrm{th}(u))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)} \cdot u'$$

$$(\mathrm{cth}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2(u)} \cdot u'$$

$$\left(\mathrm{th}\alpha = \frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha}, \ \mathrm{cth}\alpha = \frac{\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}\right)$$

Тема занятия № 4: Применение производных при исследовании функции и построения графиков.

В математике производную чаще всего используют для исследования функций и решения задач алгебры и начала анализа.

Возрастание и убывание функций.

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е.* $f'(x) \geq 0$.

2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (a, b), причем* $f'(x) > 0$ *для* $a < x < b$, *то эта функция возрастает на отрезке [a, b].*

Доказательство.

1) Если функция f(x) возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$,

тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку [a, b], причем $x_1<x_2$.

Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция f(x) возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция f(x) убывает на отрезке [a, b], то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то f(x) убывает на отрезке [a, b].

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b).

Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 +\Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство. Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$, т.е.

$f(x_1+\Delta x) - f(x_1) < 0$

Тогда

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x\to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x\to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

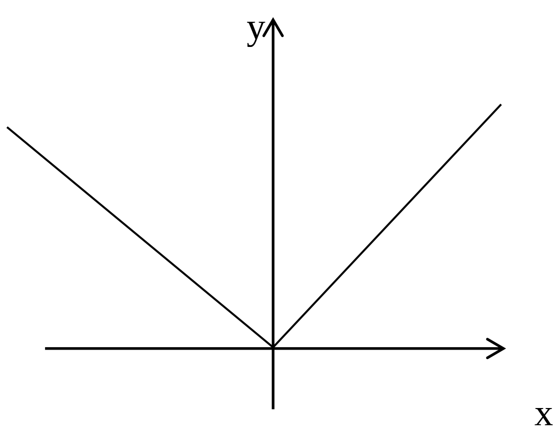
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке $x = 0$ равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

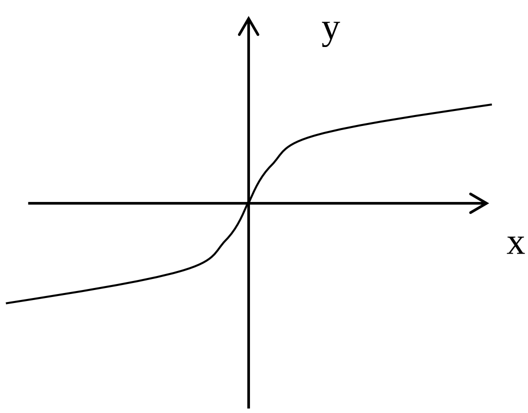
Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

1. Пример: $f(x) = |x|$



2. Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



1. В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной.
2. В точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной .

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

<u>Теорема.</u> (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.

<u>Доказательство.</u>

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$f(x) - f(x_1)<0$ или $f(x) < f(x_1)$.

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$f(x) - f(x_1)<0$ или $f(x) < f(x_1)$.

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

<u>Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков.</u>

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

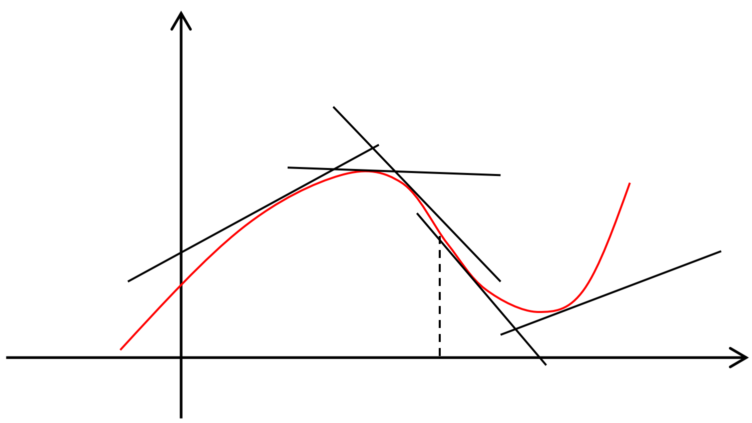
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.
Уравнение кривой: y = f(x);
Уравнение касательной: $\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Следует доказать, что $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$y - \bar{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того по условию $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \bar{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \bar{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку x = a $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.*

Доказательство. 1) Пусть $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая выпукла, а при $x > a$ кривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

1) Пусть $f''(x) > 0$ при $x < b$ и $f''(x) < 0$ при $x < b$. Тогда при $x < b$ кривая обращена выпуклостью вниз, а при $x > b$ – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

Теорема доказана.

Общая схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Исследование функции с помощью производной производится по следующей схеме:

1. Область определения функции:

D(f) – значения x, при которых функция существует.

2. Четность или нечетность функции.
3. Точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy: x=0, находим y;

с осью Ox: y=0, находим x.

4. Находим производную $f^{/}(x)$.
5. Находим критические точки функции – точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.

$f^{/}(x)$ =0. Строим интервалы. Точки , в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения f(x) на промежутки, в которых $f^{/}(x)$ сохраняет постоянный знак.

6. Находим промежутки возрастания и убывания функции- определяем знак производной в какой – либо точке методом интервалов; если $f^{/}(x) \rangle 0$, то функция возрастает; если $f^{/}(x) \langle 0$, то функция убывает.
7. Находим точки экстремума функции – точки максимума и минимума: если в точке x_0 $f^{/}(x)$ меняет знак «+» на «-», то точка x_0- точка максимума; если в точке x_0 $f^{/}(x)$ меняет знак «-» на «+», то x_0- точка минимума.
8. Находим значения функции f(x) в точках экстремума $f(x_{min})$ и $f(x_{max})$- экстремумы функции.
9. Находим $f^{//}(x)$: если $f^{//}(x) \rangle 0$, то функция вогнутая; если $f^{//}(x) \langle 0$, то функция выпуклая.
10. Находим дополнительные точки для исследования поведения функции при +∞ и при -∞.
11. Строим график.

Рассмотрим исследование функции на примере: исследование и построение графика функции $f(x) = x^3 - 3x$.

1. D(f) = R, $x \in (-\infty;+\infty)$
2. f $(-x)=(-x)^3 - 3(-x)$ = $-(x^3 - 3x)$. f(-x)=-f(x) – функция нечетная, т.е. график симметричен относительно начала координат.
3. Находим точки пересечения с осями координат: с осью Oy: x=0, y=0 (0,0); с осью

Ox: y=0.
$$x^3 - 3x = 0;$$
$$x(x^2 - 3) = 0; x^2 = 3;$$
$$x_1 = 0; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}$$

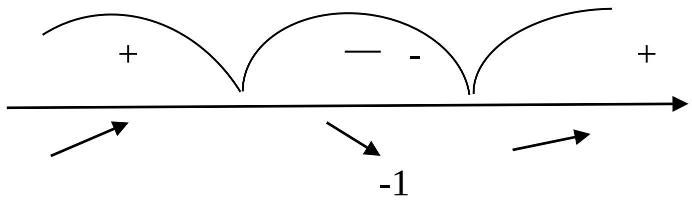
4. Находим производные функции:

$f^{/}(x) = (x^3 - 3x)^{/} = 3x^2 - 3$.

5. Находим критические точки функции:

$$f^{/}(x) = 0$$
$$3x^2 - 3 = 0$$
$$x_1 = 1; x_2 = -1.$$

6. Находим промежутки возрастания и убывания функции: $f^{/}(-2)=3*(-2)^2-3=12-3=9\rangle 0$; $f^{/}(0)=3*0-3=-3\langle 0$; $f^{/}(2)=3*2^2-3=12-3=9\rangle 0$



7. Находим точки экстремума функции: x_{max} = -1; x_{min} =1

8.Находим значения функции f(x) в точках экстремума:

x_{max} = -1;

Тема занятия № 5: Определение функции нескольких переменных. Частные производные.

План:

1. **Определение функции нескольких переменных.**
2. **Частные производные.**

До сих пор мы рассматривали функцию, значения которых зависели только от единого аргумента. Однако при рассмотрении многих вопросов из различных областей знания приходится изучать такие зависимости между переменными величинами, когда числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других.

Например, изучая физическое состояние какого-либо тела, приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Каждая точка тела задается тремя координатами: x, y, z. Поэтому, изучая, скажем, распределение плотности, заключаем, что плотность тела зависит от трех переменных: x, y, z. Если физическое состояние тела к тому же еще и меняется с течением времени t, то та же плотность будет зависеть уже от значений четырех переменных: x, y, z, t.

Другой пример: изучаются издержки производства на изготовление единицы некоторого вида продукции. Пусть:

x - затраты по материалам,

y - расходы на выплату заработной платы работникам,

z - амортизационные отчисления.

Очевидно, что издержки производства зависят от значений названных параметров x, y, z.

Определение: Если каждой совокупности значений "n" переменных ($x_1, x_2, \ldots x_n$)

из некоторого множества D этих совокупностей соответствует своё единственное значение переменной z, то говорят, что на множестве D задана функция $z=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

"n" переменных.

Например объем цилиндра выражается формулой $V=\Pi R^2 H$, где R- радиус основания, H- высота цилиндра. Следовательно объем цилиндра V есть функция от двух переменных R и H (R>0, H>0)

Множество D, указанное в определении, называется областью определения или областью существования этой функции.

Если рассматривается функция двух переменных, то совокупности чисел

обозначаются, как правило, (x, y) и интерпретируются как точки координатной плоскости Oxy, а область определения функции z = f (x, y) двух переменных изобразится в виде некоторого множества точек на плоскости Oxy.

Так, например, областью определения функции $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

является множество точек плоскости Оху, координаты которых удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 \le r^2$ т. е. представляет собой круг радиуса r с центром в начале координат.

Часто функции двух переменных задаются в неявном виде, т. е. как уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

связывающее три переменные величины. В этом случае каждую из величин x, y, z можно рассматривать как неявную функцию двух остальных.

Геометрическим изображением (графиком) функции двух переменных z = f (x, y) является множество точек Р (x, y, z) в трехмерном пространстве Oxyz, координаты которых удовлетворяют уравнению z = f (x, y).

Графиком функции непрерывных аргументов, как правило, является некоторая поверхность в пространстве Oxyz, которая проектируется на координатную плоскость Oxy в область определения функции z= f (x, y).

Так, например, (рис. 1.1) графиком функции

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

является верхняя половина сферы, а графиком функции

$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ нижняя половина сферы.

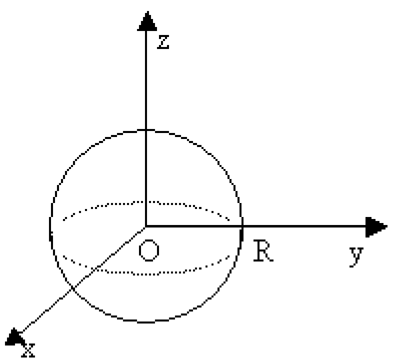


Рис. 1.1

Графиком линейной функции z = ax + by + c является плоскость в пространстве Oxyz, а графиком функции z = const служит плоскость, параллельная координатной плоскости Oxyz.

Заметим, что функцию трех и большего числа переменных изобразить наглядно в виде графика в трехмерном пространстве невозможно.

2.Частные производные сложных функций нескольких переменных

Частные производные первого порядка

Будем рассматривать функции трех независимых переменных. Пусть в некоторой трехмерной области V задана функция u= f (x, y, z) переменных x,y,z и пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - некоторая внутренняя точка V.

Дадим независимому переменному x приращение $\Delta x=x-x_0$, тогда функция и получит так называемое частное приращение по x:

$$\Delta_x u = \Delta_x f = f\left(x_0 + \Delta x, y_0, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right).$$

Определение: Если существует конечный предел отношения частного приращения по x функции f(x,y,z) в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ к вызвавшему его приращению Δx при $\Delta x \Rightarrow 0$, то этот предел называется частной производной по x функции u=f(x,y,z) в точке M_0 и обозначается одним из символов:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}, \quad u'_x(M_0), \quad f'_x(M_0).$$

По определению,

$$f'_x(M_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x, y_0, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta x}.$$

Частные производные по y и по z определяются аналогично:

$$f'_y(M_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0 + \Delta y, z_0\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta y};$$

$$f'_z(M_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left(x_0, y_0, z_0 + \Delta z\right) - f\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta z}.$$

Производные f'x, f'y, f'z называются ещё и частными производными первого порядка функции f(x,y,z), или первыми частными производными.

Так как частное приращение $\Delta x f(M_0)$ получается лишь за счет приращения независимой переменной x при фиксированных значениях других независимых переменных, то частная производная $f'x(M_0)$ может рассматриваться как производная функции $f(x,y_0,z_0)$ одного переменного x. Следовательно, чтобы найти производную по x, нужно все остальные независимые переменные считать постоянными и вычислять производную по x как от функции одного независимого переменного x.

Аналогично вычисляются частные производные по другим независимым переменным.

Если частные производные существуют в каждой точке области V, то они будут функциями тех же независимых переменных, что и сама функция.

Пример 1. Найти частные производные функции $u=z^{-xy}$, $z > 0$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z^{-xy}\right)=z^{-xy}\cdot\ln z\cdot(-xy)'_x=-y\cdot z^{-xy}\cdot\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(z^{-xy}\right)=z^{-xy}\cdot\ln z\cdot(-xy)'_y=-x\cdot z^{-xy}\cdot\ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-xy}\right)=-xy\cdot z^{-xy-1}.$$

Пример 2. Показать, что функция

$$u=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

удовлетворяет тождеству:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$$

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2(z-c)}{2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

– данное равенство справедливо для всех точек M(x;y;z), кроме точки M_0(a;b;c).

Пример: Какой угол образует с осью Ox касательная к линии:

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$$

в точке M(2,4,5)?

Решение:

$z'_x = \dfrac{x}{2}$, **отсюда** $z'_x\big|_M = 1$ **, следовательно,** $tg\,\alpha = 1$**, т. е.** $\alpha = 45^{?}$.

Используем геометрический смысл частной производной по переменной x (при постоянном y):

$z'_x = \dfrac{x}{2}$, **отсюда** $z'_x\big|_M = 1$ **, следовательно,** $tg\,\alpha = 1$**, т. е.** $\alpha = 45^{?}$.

Тема занятия №6: Первообразная функции и неопределенный интеграл. Методы интегрирования.

План:
1. **Первообразная функция.**
2. **Неопределенный интеграл и его свойства.**
3. **Таблица неопределенных интегралов.**
4. **Методы интегрирования.**

1. **<u>Первообразная функция</u>:**

Под дифференцированием функции мы понимаем процесс нахождения производной, но в практике есть еще и обратные задачи, нахождение функции зная её производную. Процесс нахождения производной и первообразной являются взаимообратные операции.

Определение: Функция F(x) называется первообразной функцией для функции f(x) на интервале (a, b), если F(x) дифференицируема на (a, b) и F'(x) = f(x)

Первообразная обозначается F(x)

Пример: Функция x^5 является первообразной для $5x^4$ на $(-\infty;+\infty)$, так как $(x^5)' = 5x^4$

Теорема 1: Если функция непрерывна на каком – нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную. (Без доказательства).

Теорема 2: Если F(x)- первообразная для функции f(x) на интервале (a, b), то F(x) +C, также первообразная , где C - любое число.

Теорема 3:Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции f(x) на интервале (a, b), то они на этом промежутке отличаются на постоянную т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$

Из данных теорем следует что, если функция f(x) непрерывна на промежутке (a, b), то она имеет не одну первообразную, а множество первообразных.

Множество всех первообразных обозначается **F(x) +C**

2.**<u>Неопределенный интеграл и его свойства.</u>**

Действие нахождения первообразной называется **интегрированием.**

Определение: Множество всех первообразных функции f(x) на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции f(x) и обозначается символом: $\int f(x)dx$.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Где **f(x)** – подынтегральная функция, **dx**- дифференциал независимой переменной, **f(x)dx –** подынтегральное выражение.

Примеры: $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, надо взять производную от результата и убедиться, что получена подынтегральная функция f(x).

Как и всякая обратная операция, интегрирование более сложное действие чем дифференцирование.

Основные свойства неопределенного интеграла:

а). Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной Функции (∫ **f(x)dx)' = f(x);** .

б). Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых функций $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x) + \int f_2(x)$;

в). Постоянный множитель можно вынести из под знака интеграла, т.е. если k = const ≠ 0, то $\int k f(x)dx) = k\int f(x)dx)$.

г)Если **F(x)** есть первообразная **f(x),** то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

3. Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C,$
2. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C$

Интегралы содержащие в этой таблице называются *табличными*.

4. Методы интегрирования:

- Непосредственное интегрирование функций

Непосредственным интегрированием называется способ вычисления неопределенных интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенных интегралов.

Пример1. $\int(4x^3 + \frac{2}{x^3} - 1)dx = 4\int x^3dx + 2\int x^{-3}dx - \int dx = x^4 - \frac{1}{x^2} - x + C$

Пример2. $\int 3^x e^{2x}dx = \int(3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln 3e^2} + C$

- Интегрирование методом замены переменной (подстановки).

В основе метода лежит утверждение о независимости вида неопределенного интеграла от выбора аргумента, то есть если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции U= h(x) также существует неопределенный интеграл, причем $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таким образом, получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\boxed{\int f(u)du = \int f(h(x))h'(x)dx, \text{ где } U = h(x).}$$

Пример1. $\int \sqrt{5\sin x + 2}\cos x dx = \begin{bmatrix} u = 5\sin x + 2 \\ du = 5\cos x dx \\ \cos x dx = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \sqrt{u du} = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$, делаем обратную подстановку и таким образом:

$$\int \sqrt{5\sin x + 2}\cos x dx = \frac{2}{15}(\sqrt{5\sin x + 2})^3 + C$$

Тема занятия №7: Определенный интеграл. Формула Ньютона - Лейбница. Свойства определенного интеграла.

План:
1. **Определенный интеграл.**
2. **Геометрический смысл определенного интеграла.**
3. **Формула Ньютона- Лейбница.**
4. **Основные свойства определенного интеграла.**

1. **<u>Определенный интеграл</u>:**

Пусть f(x) – функция, непрерывная на данном отрезке [a;b], где a<b, и F(x) – некоторая первообразная при $x \in [a;b]$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей:

$a = x_0 < x_1 < x_3 < \ldots < x_n = b$

Обозначим длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ (i=1; k) через

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Тогда величина $\delta = \underbrace{\max \Delta x_i}_{i=1,2\ldots k}$ называется *мелкостью разбиения.*

Зафиксируем произвольным образом точки

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, …. k и составим сумму

$$\sigma(f, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i .$$

Суммы такого вида называется *интегральными суммами Римана.*

Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке [a;b], если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка [a;b], у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$и для любого выбора точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, (i=1÷ n) выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{k} f(\xi^{(n)}) * \Delta x^{(n)} = A$$

где $\Delta x_i^{(n)} = (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$, (I = 1÷k, n= 1, 2, …,).

Если выполнены все условия определения, то число A назовем (Римановым) определенным интегралом функции f на отрезке [a;b] и будем обозначать $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким образом $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma \left(f, \xi_i^{(n)}, \ldots, \xi_{k_{nk}}^{(n)}\right)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$,

или подробно $\lim\limits_{\max|\Delta X_i|\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) * \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Если существует конечный предел интегральной суммы

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

не зависящий от способа разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называют определенным интегралом (или интегралом Римана) от функции f(x) на отрезке [a; b] и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k-1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если указанный предел существует, то функция f(x) называется интегрируемой на отрезке [a; b] (или интегрируемой по Риману). При этом f(x) – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования, a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, в случае, когда диаметр разбиения λ стремится к нулю.

2. Геометрический смысл определенного интеграла.

Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и f(x) ≥ 0. Фигура, ограниченная графиком AB функции y = f(x), прямыми x = a, x = b и осью OX(рисунок далее), называется *криволинейной трапецией.*

Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой f $f(\xi_k)$, а сумма $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (изображенной на рисунке). Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора точек ξ_k.

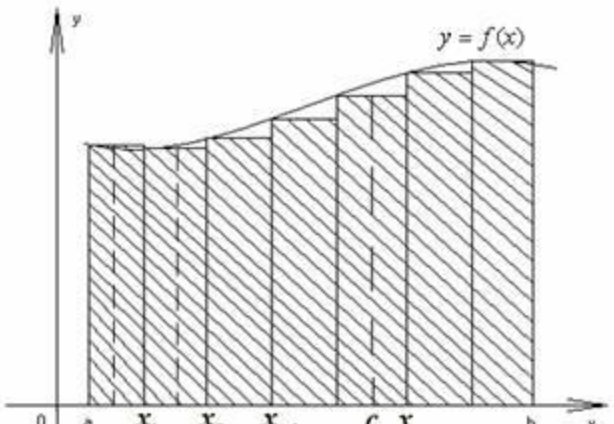


Рис. 1

Чем меньше $\Delta x_{k,}$ k = 1,…, n, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

3. Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление определенных интегралов через предел интегральных сумм связано с большими трудностями. Поэтому существует другой метод, основанный на тесной связи, существующей между понятиями определенного и неопределенного интегралов. Заслугой Ньютона и Лейбница является именно установление факта этой связи.

Формула Ньютона – Лейбница дает правила вычисления определенного интеграла: *значение интеграла на отрезке* **[a; b]** *от непрерывной функции* **f(x)** *равно разности значения любой ее первообразной вычисленной при* ***x = b*** *и* ***x = a***.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Здесь a и b – соответственно нижний и верхний пределы интегрирования. Можно записать, что интеграл равен приращению первообразной.

Понятие определенного интеграла можно вывести через площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции (фигуры, ограниченные линиями y = f(x), y = 0, x = a, x = b) выражается интегральной суммой или числом, которое называется определенным интегралом.

Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними, но это разные понятие по смыслу: определенный интеграл – это число, а неопределенный интеграл – совокупность первообразных функций. Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается методами интегрирования.

4. Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны (a=b), то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если f(x) = 1,то

$$\int_a^b dx = b - a$$

3. При перестановки пределов интегрирования определенный интегралы меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$,… $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b (x)dx \pm ... \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6. Если существует интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^u f(x)dx.$ то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, d, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Оценка определенного интеграла: если $m \leq f(x) \leq \text{M}$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \langle \int_a^b f(x)dx \langle \text{M}(b-a)$$

Тема занятия № 8: Вычисление определенных интегралов различными методами.

План:

1. **Замена переменной в определенном интеграле.**
2. **Интегрирование по частям в определенном интеграле.**

1. **<u>Замена переменной в определенном интеграле:</u>**

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме. Применение замены переменной в определенном интеграле базируется на следующей теореме.

Теорема. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a; b], а функция $x = \phi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1; t_2]$, причем $\phi([t_1; t_2]) = [a; b]$ и $\phi(t_1) = a$, $\phi(t_2) = b$, то справедливая формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Рассмотрим примеры:

Вычислите интеграл $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1dx}.$

Решение:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1dx} = \left\{ \begin{matrix} t = \sqrt{e^x - 1}, x = \ln(1 + t^{2)} \\ dx = \dfrac{2t}{1+t^2} dt \\ 0 \le x \le \ln 2, 0 \le t \le 1 \end{matrix} \right\} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+t^2})dt = 2[t - arctg\ t]\Big|_0^1 = \frac{4-\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{4-\pi}{2}$.

2. **<u>Интегрирование по частям в определенном интеграле.</u>**

Пусть u(x) и v(x) – дифференцируемы на отрезке [a; b] функции переменной x. Тогда d(uv) = udv+vdu. Проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке [a; b]:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b d(uv) = (uv)\Big|_a^b.$$

Следовательно, формула принимает вид:

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

Формула называется **формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.**

Например, вычислим интеграл $\int_1^2 \ln xdx$.

Решение:

$$\int_1^2 \ln x\ \ dx=(x\cdot\ln x)\Big|_1^2-\int_1^2 dx=2\ln 2-1.$$

Ответ: $2\ln 2-1.$

Рассмотрим более сложные задача с применением нахождения определенного интеграла.

1) При каком α выполняется равенство $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1-2x}{3}dx=-\frac{4}{3}$?

Решение:

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1-2x}{3}dx=\int_{\frac{a}{2}}^{a}(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x)dx=(\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{3})\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{a}{3}-\frac{a^2}{3}-(\frac{a}{6}-\frac{a^2}{12})=\frac{2a-3a^2}{12}.$$

По условию задачи $\frac{2a-3a^2}{12}=-\frac{4}{3}$, откуда $a_1=-2,\ \ a_2=2\frac{2}{3}$.

Ответ: $-2;\ 2\frac{2}{3}$.

2) Вычислите интеграл $\int_0^{\pi}\sin 2x\ \ \cos 3xdx.$

Решение:

$$\int_0^{\pi}\sin 2x\ \ \cos 3xdx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)dx=\frac{1}{2}(-\frac{1}{5}\cos x)\Big|_0^{\pi}=-\frac{4}{5}.$$

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

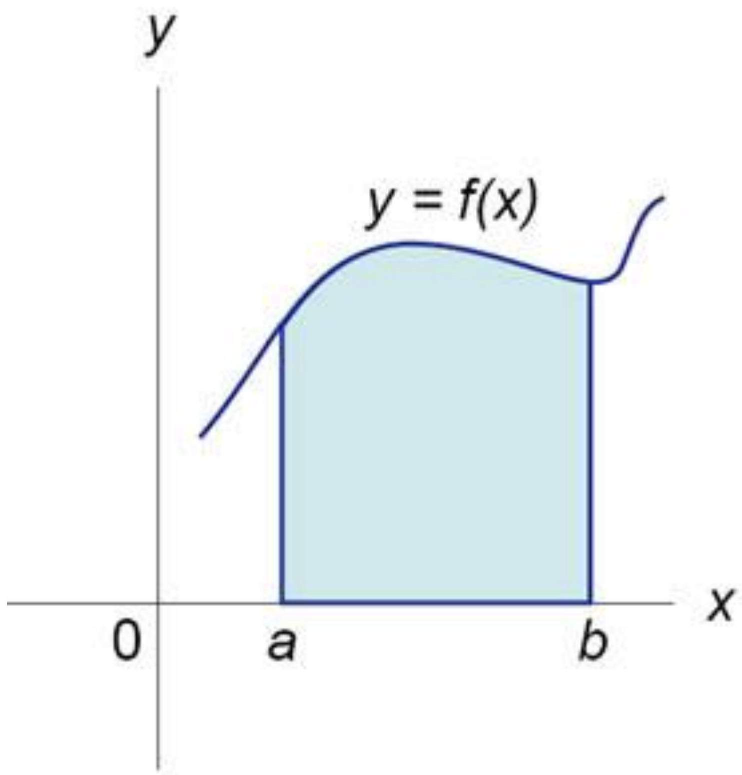
Тема занятия №9: Применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур,
объемов тел.

План:

1. **Применение определенного интеграла к вычислению площади плоских фигур.**
2. **Физические приложения определенного интеграла.**
3. **Геометрические приложения определенного интеграла.**
4. **Применение определенного интеграла к вычислению объемов тел.**

1. <u>Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры.</u>

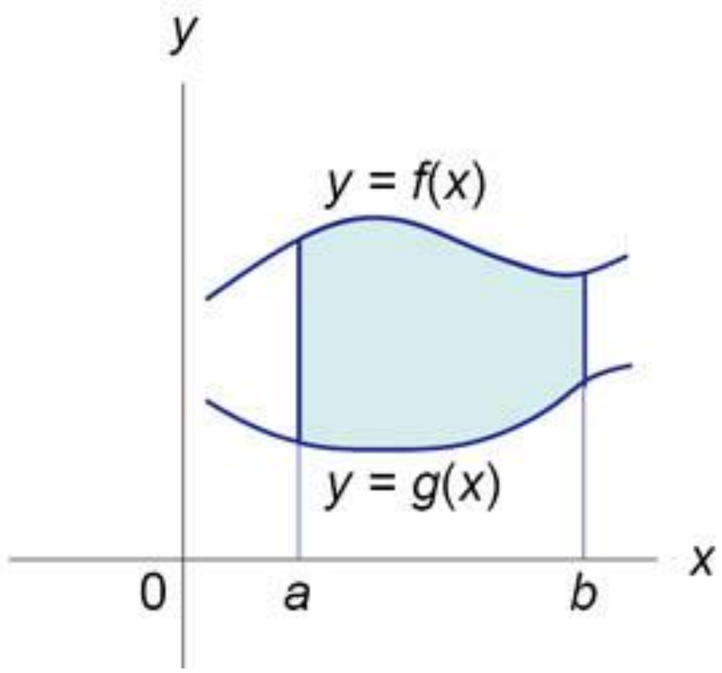
Фигура, ограниченная на плоскости OXY отрезком $[a,b]$оси OX, прямыми x=a, x=b и графиком непрерывной и неотрицательной функции y = f(x) на [a,b], называется криволинейной трапецией.



Площадь криволинейной трапеции вычисляется с помощью определенного интеграла:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Пусть F (x) и G (x) - первообразные функций f (x) и g (x), соответственно. Если f (x) ≥ g (x) на замкнутом интервале [a, b],



то площадь области, ограниченной двумя кривыми y = f (x), y = g (x) и вертикальными линиями x = a, x = b (рисунок 2), определяется формулой

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx=F(b)-G(b)-F(a)+G(a).$$

Ниже перечисленные всевозможные случаи нахождения фигур.

1) Если *y =f(x)* – непрерывная*, f(x)* ≥ 0 на *[a; b]*, то

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

2) Если *y = f(x)* – непрерывная, *f(x)* ≤ 0 на отрезке *[a; b]*, то

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

3) Если *y = f(x), y = g(x)* – непрерывные на отрезке *[a; b]*, *f(x)* $\geq$ *g(x)* на *[a; b]*, то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

4) Если *y = f(x), y = g(x)* – непрерывные на *[a; b]*, *f(x)* $\geq$ *g(x)* на *[a; b]*, то

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

5) Если *y = f(x), y = g(x)* – непрерывные на *[a; b]*, *f(x)* $\geq$*g(x)* на *[c;b]*, где c $\in$ [a;b], *f(x)g(x)*$\leq$*g(x)* на *[a; c]*, то

$$S=\int_a^c (g(x)-f(x))dx+\int_c^b (f(x)-g(x))dx.$$

6) Если *y = f(x)* – непрерывная на *[a; c]*, *y = g(x)* – непрерывная на *[b;c]*, *f(x)≥ g(x)* на *[a;c]*, где $c \notin [a; b]$, то

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c g(x)dx.$$

7) Если *y=f(x)* – непрерывная на *[a; c]*, *y=g(x)* – непрерывная на *[c; b]*, где $c \in [a;b]$, то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$

2.Физические приложения определенного интеграла.

ВЕЛИЧИНЫ	СООТНОШЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ	ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ	ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА
A – работа F – сила N - мощность	dA = F(x)dx	F(x) = $\frac{dA}{dx}$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$
	$dA = N(t)dt$	$N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
m – масса тонкого стержня p – линейная плотность	dm = p(x)dx	p(x) $\frac{dm}{dx}$	m= $\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$
q – электрический заряд I - сила тока	dq = I(t)dt	I(t) = $\frac{dq}{dt}$	q = $\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
s-перемещение v - скорость	ds = v(t)dt	v(t) = $\frac{ds}{dt}$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Q – количество теплоты t-теплоемкость	dQ = c(t)dt	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

3. Геометрические приложения определенного интеграла.

1.Определение и вычисление кривой, дифференциал кривой.

Если кривая y= f(x) на отрезке [a; b] – гладкая (т.е. производная $y' = f(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 = y^2}\, dx$$

При параметрическом задании кривой x = x(t), y = y(t) [x(t) и y(t) непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2 вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dt.$$

Если гладкая кривая задана в полярных системах координат уравнением $\rho = \rho(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$, то длина дуги

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta.$$

2.Дифференциал длины дуги.

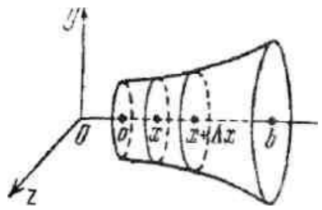
Длина дуги кривой определяется формулой, $L = \int \sqrt{1 = (f'(x))^2}\, dx,$где y = f(x) $\forall$ x $\in$[a; b]. Предположим, что в этой формуле нижний предел интегрирования остается постоянным, а верхний изменяется. Обозначим верхний предел буквой x, а переменную интегрирования t. Длина дуги будет функцией верхнего предела:

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

4.Применение определенного интеграла к вычислению объемов тел.

Вычисление объемов тел вращения:

Пусть дана кривая y=f(x), a≤x≤b. Объем тела вращения, ограниченного плоскостями x= a и x=b и поверхностью вращения кривой вокруг оси OX вычисляется по формуле:



$$V = \Pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Аналогично можно получить формулу объема тела вращения вокруг оси ОУ

$$V = \Pi \int_c^d \varphi^2(y)dy\,;$$

Пусть задано тело объемом V, причем имеется такая прямая, что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы не взяли, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x (из отрезка [a; b]) поставлено в соответствие единственное число S (x) – площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке [a; b] задана функция S(x). Если функция S непрерывна на отрезке [a; b], то справедлива формула:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Полное доказательство этой формулы дается в курсах математического анализа, а здесь остановимся на наглядных соображениях, приводящих к ней.

Разобьем отрезок [a; b] на n отрезков равной длины точками:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n,$$

и пусть $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Через каждую точку x_k проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разрезают заданное тело на слои. Объем слоя, заключенного между плоскостями a_{k-1} и a_k , при достаточно больших nприближенно равен площади $S(x_{k-1})$ сечения, умноженной на «толщину слоя» Δ x, и поэтому:

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, т.е. чем больше n. Поэтому $V_n \to$ V при $n \to \infty$. Объем фигуры, полученной вращением вокруг оси Ox, находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Тема занятия № 10: Дифференциальные уравнения.

Развитие дифференциального и интегрального исчисления положило начало новой теории - дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения в математике- это уравнения, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение ее производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, ее производные и независимые переменные. А решаются дифференциальные уравнения с использованием правил дифференцирования и интегрирования.

Теория дифференциальных уравнений – раздел математики, в котором изучают дифференциальные уравнения и связанные с ними задачи. Ее результаты применяются во многих естественных науках, особенно широко – в физике.

Дифференциальные уравнения описывают самые разные процессы природы. Например:

1. Поглощение света в растворе. Доля поглощаемой энергии света на единицу толщины L слоя раствора постоянна и определяется концентрацией раствора С и молярным коэффициентом Е поглощения растворенного вещества. I(L) – интенсивность света на толщине L. Тогда dI(L) = - I(L) E C dL, следовательно, I(L) = I_0 e^{-ECL} – закон Бугера – Ламберта – Бера для раствора.
2. Доля убыли концентрации лекарственного вещества после введения в организм (фармакологическая кинетика).
3. Описание волновых процессов и колебаний и т.д.

В медицинских приложениях дифференциальные уравнения, например, используется для:

1. Определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики;
2. Описания медико-биологических приложений ультразвука; эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография;
3. Описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспринимающих органов человека и животных и т.д.

Кроме этого, многие математические и физические задачи решаются с помощью дифференциальных уравнений.

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени. Формулировка второго закона Ньютона для материальной точки дает простейший пример обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с неизвестной функцией координат точки и временем, выступающим в роли независимой переменной.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — это уравнения вида

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$ или $$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — неизвестная функция (возможно, вектор-функция; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от независимой переменной x , штрих означает дифференцирование по x . Число n называется порядком дифференциального уравнения. Решением дифференциального уравнения называется раз дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению во всех точках своей области определения. Обычно существует целое множество таких функций (такое параметризованное семейство решений, называется общим решением дифференциального уравнения), и для выбора одного из них требуется наложить на него дополнительные условие: например, потребовать, чтобы решение принимало в данной точке данное значение. Полученное единственное решение называется частным решением.

2.Дифференциальные уравнения с разделяющими переменными

Пусть y(x) — некоторая функция, y'(x) — ее производная. Для удобства будем записывать

производную в $\frac{dy}{dx} = y'(x)$

имеющем смысл отношения бесконечно малых приращений — дифференциалов. Дифференциал dx — приращение значения переменной в окрестности x, стремящееся к нулю. Дифференциал функции dy — малое приращение функции, dy = f(x + dx) − f(x) = y'(x)dx. Пусть f(x) и g(y) — некоторые функции от x и y. Рассмотрим уравнение

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ Уравнение такого вида называется обыкновенным дифференциальным уравнением с разделяющимися пе$\frac{dx}{g(y)}$нными. Умножим его на

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ Последнее равенство означает, что малые приращения левой и правой частей равны. Поэтому их суммы также равны. Предположим что при $x = x_0$ $y = y_0$ и возьмем интегралы от левой и правой частей. Пределы интегрирования — от y_0 до y для левой части и от x_0 до x для правой части уравнения:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Решая получившееся в результате интегрирования алгебраическое уравнение, мы можем выразить y(x).Значения x_0 и y_0 называются начальными условиями. В случае других начальных условий решение уравнения будет отличаться на постоянную. Поэтому, если начальные условия не даны, можно взять первообразные левой и правой частей и при$\int f(x)dx = F(x) + C$нту. Используя неопределенный интеграл — обозначение м... х -

где F(x) — первообразная f(x), C — произвольная постоянная, запишем это в виде

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$ь, что у дифференциального уравнения с разделяющимися переменными могут существовать так называемые нулевые решения — постоянные y, удовлетворяющие уравнению g(y) = 0. При них равны нулю как правая, так и левая части дифференциального уравнения (поскольку производная константы равна нулю).

Пример1:

Решить дифференциальное уравнение

$\frac{dy}{dx} = (x+1)\cos^2 y$ ные:

$$\frac{dy}{(\cos^2 y)} = (x+1)\,dx$$

Т. к. начальные условия не заданы, возьмем неопределенный интеграл от обеих частей уравнения:

$$\int \frac{dy}{(\cos^2 y)} = \int (x+1)\,dx$$

$\operatorname{tg}\ y = \frac{x^2}{2} + x + C$ разить у ч $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$

Найдем также нулевые реше

$\cos^2 y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Отве $y(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right),\ C = \text{const},\ y(x) = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Тема занятия № 11: Числовая последовательность. Пределы функций и последовательности.

План:
1. **Числовая последовательность.**
2. **Пределы функций и последовательности.**

1. **Числовая последовательность:**

Определение: Если каждому числу n из натурального ряда чисел
1,2,3,4,…,n,…
поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел
$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$
называется числовой последовательностью.

Числа $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ будем называть элементами (или членами) последовательности, символ x_n - общим элементом последовательности, а число n – его номером. Сокращено последовательность обозначают символом $\{x_n\}$. Так, например, символ $\{\frac{1}{n}\}$ обозначает последовательность 1, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента.

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Определение: Последовательность $\{y_n\}$ называют возрастающей, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots.$

Определение: Последовательность $\{y_n\}$ называют убывающей, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots .$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Арифметические действия над числовыми последовательностями:

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

- Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность
$mx_1, mx_2, \ldots mx_n, \ldots$;
- Суммой данных последовательностей назовем последовательность $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots$;

- Разностью – последовательность $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, …, $x_n - y_n$,…;
- Произведением - последовательность $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, …, $x_n y_n$,…;
- Частным – последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$если $y_n \neq 0$

Ограниченные и неограниченные последовательности:

- Ограниченная сверху последовательность — это последовательность элементов множества X, все члены которой не превышают некоторого элемента из этого множества. Этот элемент называется верхней гранью данной последовательности.

(x_n) ограниченная сверху $\Leftrightarrow \exists M \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \leqslant M$

- Ограниченная снизу последовательность — это последовательность элементов множества X, для которой в этом множестве найдётся элемент, не превышающий всех её членов. Этот элемент называется нижней гранью данной последовательности.

(x_n) ограниченная снизу $\Leftrightarrow \exists m \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \geqslant m$

- Ограниченная последовательность (ограниченная с обеих сторон последовательность) — это последовательность, ограниченная и сверху, и снизу.

(x_n) ограниченная $\Leftrightarrow \exists m, M \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\colon m \leqslant x_n \leqslant M$

- Неограниченная последовательность — это последовательность, которая не является ограниченной.

(x_n) неограниченная $\Leftrightarrow \forall m, M \in X\ \exists n \in \mathbb{N}\colon\ (x_n < m) \vee (x_n > M)$

Сходящаяся последовательность — это последовательность элементов множества X, имеющая предел в этом множестве.

Расходящаяся последовательность — это последовательность, не являющаяся сходящейся.

Бесконечно малая последовательность — это последовательность, предел которой равен нулю.

Бесконечно большая последовательность — это последовательность, предел которой равен бесконечности.

2. <u>Пределы функций и последовательности:</u>

Предел, одно из основных понятий математики. Предел — постоянная, к которой неограниченно приближается некоторая переменная величина, зависящая от другой переменной величины, при определённом изменении последней. Простейшим понятием является предел числовой последовательности, с помощью которого могут быть определены понятия предел функции, предел последовательности точек пространства, предел интегральных сумм.

Предел функции является обобщением понятия предела последовательности.

Определение: Число **a** называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что $n \rangle N$ выполняется неравенство $|x_n - a| \langle \varepsilon$

Предел обозначается $\operatorname{Lim}\limits_{x \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Определение: Значение A называется пределом (предельным значением) функции f(x) в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} (\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \neq x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

Свойства пределов:

- Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций:
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x).$
- Предел постоянной величины равен самой постоянной величине:
$\lim\limits_{x\to a} C = C.$
- Постоянный коэффициент можно выносить за знак предела:
$\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x).$
- Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций (при условии, что последние существуют):
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x).$
- Предел частного двух функций равен отношению пределов этих функций при условии, что предел знаменателя не равен нулю:
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},$ если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0.$
- Предел степенной функции:
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^p = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^p,$
- Если f (x$\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $a \neq 0,$ если $n \leq 0.$
- Предел показательной функции: где осн$\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)},$
- Предел логарифмичес$\lim\limits_{x\to a}\left[\log_a f(x)\right] = \log_a\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right],$
- Предпо$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ всех x близких к для всех x близких к a, за исключением, быть может, самой

точки x = a. Тог$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L,$ то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L.$

Замеча́тельные преде́лы:

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Следствия:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$$

Раскрытие неопределённостей:

При нахождении многих пределов непосредственное применение теорем о пределах оказывется невозможным. К таким случаям относятся так называемые неопределенности вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0*\infty$, 1^{∞}.

Определение 1. Если дано отношение двух функций f(x) $/\varphi(x)$ и $f(x)\to 0, \varphi(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то говорят, что при $x\to x_0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Определение 2. Если дано отношение двух функций $f(x)/\varphi(x)$ и $f(x)\to\infty, \quad \varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то говорят, что мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Определение 3. Если дана разность $f(x)-\varphi(x)$ и $f(x)\to+\infty$, $\varphi(x)\to+\infty$, (или $f(x)\to\infty$, $\varphi(x)\to-\infty$), то будем говорить, что имеем неопределенность вида $\infty-\infty$.

Определение 4. Если дано произведение $f(x)*\varphi(x)$ и $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x-x_0$, то будем говорить, что имеем неопределенность вида $0*\infty$.

Определение 5. Если дано выражение $[f(x)]^{\varphi(x)}$ и $f(x)\to 1$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, то будем говорить, что имеем неопределенность 1^{∞}.

Замечание 1. Данные определения остаются в силе и в случаях, когда $x\to\infty, \quad x\to+\infty, \quad x\to-\infty$ и $x\to x_0$ справа и слева.

Замечание 2. Отметим, что для раскрытия неопределенней вида $\frac{0}{0}$, тем, где это возможно, надо преобразовать числитель и знаменатель, разложить их на множители, сократить дробь, избавиться от неопределенности и затем перейти к пределу. В ряде случае к таким неопределенностям применяют первый замечательный предел.

В случае неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, если в числителе и знаменателе стоят многочлены, то целособразно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень x из числа слагаемых одночленов числителя и знаменателя, а после перейти к пределу.

Неопределенности других видов раскрываются путем преобразования соответствующих выражений и сведения их неопределенности $\frac{0}{0}\,или\,\frac{\infty}{\infty}$, и при раскрытии неопределенности вида 1^{∞} пользуются вторым замечательным пределом.

Правило Лопиталя применяется к раскрытию неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема (правило Лапиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Пусть далее $\lim\limits_{x-x_0} f(x)=\lim\limits_{x-x_0}\varphi(x)=0$ и в указанной окрестности $\varphi'(x)\neq 0$. Тогда, если существеует предел отношения производных $\lim\limits_{x-x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x-x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем справедливо равенство:

$$\lim_{x-x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x-x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание 1. Теорема верна и в случаях, когда $x\to\infty, x\to\neq\infty.$

Замечание 2. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получим:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Замечание 3. Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ справедливо аналогичное доказанному утверждение, а именно: если в формулировке теоремы заменить требование $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ на условие, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то теорема остается справедливой.

Замечание 4. Может оказаться, что предел отношения функций существует, а предел отношения производных не существует. В этом случае правило Лопиталя не применимо, и надо раскрыть неопределенность другим способом.

Замечание 5. Правило Лопиталя можно применить и к другим неопределенностям (напр., вида 0, ∞, ∞ -∞, 1^{∞} и т.д.). Но для этого их надо предварительно преобразовать к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$.

Тема занятия №12: Числовые ряды. Сходимость и расходимость.

План:
1. **Числовой ряд и его сходимость.**
2. **Некоторые свойства числовых рядов.**
3. **Необходимое условие сходимости ряда.**

1. Числовой ряд и его сходимость.

Пусть дана числовая последовательность $u_1, u_2, \dots u_n, \dots$

Тогда выражение $u_1 + u_2 \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) называется **числовым рядом**, числа u_1, u_2, $u_3 \dots$ - **членами** ряда, а u_n – **общим членом** ряда (1).

Суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1+u_2$, $S_3 = u_1+u_2+u_3$, …, $S_n = u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$ … называют **частичными суммами** ряда.(1)

Таким образом каждому ряду (1) мы может поставить в соответствие числовую последовательность частичных сумм:

$$S_1; S_2; S_3; \dots, S_n; \dots \quad (2)$$

Определение. Если последовательность частичных сумм (2) сходится, то ряд (1) называется **сходящим**, а предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, называется **суммой ряда.**(1)

Если последовательность (2) расходится, то ряд (1) называется **расходящимся.**

В случае сходимости ряда (1), т.е. при $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, будем писать $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Пример: Показать сходимость ряда

$$\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (3)$$

Решение: Для любого k, отличного от нуля 0 и -1, имеем равенство

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad (4)$$

Поэтому для частичной суммы S_n имеем:

$$S_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда, перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Следовательно, ряд (3) сходится и его сумма равна 1.

2. Некоторые свойства числовых рядов.

Если в числовом ряде

$$u_1 + u_2 \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots \quad (1)$$

отбросим n первых членов, то снова получим ряд, который называют остатком ряда (1) после n-го члена. Обозначим остаток ряда(1) через r_n, т.е.

$$r_{n=}\ u_1 + u_2 \ldots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots \quad (2)$$

Теорема 1. Если числовой ряд (1) сходится, то сходится и его остаток и, наоборот, если сходится остаток, то сходится и ряд.(1)

Доказательство. 1) Пусть сходится ряд.(1) Напишем частичную сумму его n+m членов:

$$S_{n+m} = S_n + (u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}) \quad (3)$$

Зафиксируем n и перейдем в (3) к пределу при $m \to \infty$. По условию теоремы предел левой части равенства(3) существует, поэтому существует и предел правой части, т.е. сходится ряд (остаток)

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots$$

2) Если же остаток (2) сходится т.е. существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots)$$

то из (3) следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+m}$. А это и означает сходимость ряда (1).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если ряд (1) расходится и его остаток (2). Верно и обратное утверждение.

Доказывается от противного.

Следствие 2. Отбрасывание конечного числа членов ряда (1) или добавление к нему конечного числа членов не влияет на сходимость, расходимость ряда (1)

Теорема 2. Если члены сходящего ряда умножить на одно и то, число C, то полученный ряд также будет сходиться и его сумма будет равна произведению числа C на сумму первоначального ряда.

Доказательство. Пусть ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится. Тогда его частичная сумма $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Рассмотрим ряд:

$$Cu_1 + Cu_2 + Cu_3 + \ldots + Cu_n + \ldots \quad (4)$$

его n- ю частичную сумму $s_n{}' = Cu_1 + Cu_2 + Cu_3 + \ldots + Cu_n = C(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = CS_n$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = \lim\limits_{n\to\infty} CS_n = CS.$

Отсюда следует, что ряд (4) сходится и $\Sigma Cu_n = CS$, т.е. $\Sigma Cu_n = C\Sigma u_n$.

Отметим, что при умножении расходящего ряда на число $C \neq 0$ снова получим расходящий ряд.

3. Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство. Действительно, так как $u_n = S_n - S_{n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Теорема доказана.

Итак, для всякого сходящего ряда выполняется условие (2), поэтому его и называют **необходимым условием сходимости** ряда.

Из доказанной теоремы следует, что если условие (2) не выполняется, то ряд (1) расходится. Например, ряд 1-1+1-1+… является расходящимся, так как не существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1}$.

Замечание. Выполнение необходимого условия сходимости еще не обеспечивает сходимости числового ряда. При этом ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. Например, для ряда(3) из §1 условие (2) выполняется и он сходится. Рассмотрим другой ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \quad (3)$$

который называется гармоническим рядом, так как каждый его член, начиная со второго, есть среднее гармоническое соседних членов.

Отметим, что число c называется средним гармоническим чисел a и b, если $\frac{1}{c} = \frac{1/a + 1/b}{2}$.

Для гармоничного ряда (3) выполняется необходимое условие сходимости. Тем не менее он расходится. Запишем ряд (3) в виде:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots$$

Для частичных сумм с 2^n членами имеем:

$$S_{2^1} = 1 + \frac{1}{2};$$
$$S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2};$$
$$S_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3};$$
....;
$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \ldots + 2^{n-1} * \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Отсюда следует, что $S_{n^n} \to \infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

Тема занятия №13: Интегральный признак Коши - Маклорена. Признак Даламбера.

План:
1. **Интегральный признак Коши - Маклорена.**
2. **Признак Даламбера.**

1. Интегральный признак Коши – Маклорена.

Пусть дан положительный числовой ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, (1) и пусть существует непрерывная, неотрицательная и невозрастающая в промежутке [1;∞) функция f(x) такая, что f(n) = a_n, $\forall n=1,2,3,\ldots$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ (2) и ряд (1) одновременно или сходятся или расходятся.

Чтобы получить функцию, о которой идет речь в теореме, достаточно в формуле общего члена ряда (1) вместо n записать x и полученное выражение принимать за f(x).

Примеры. Исследовать сходимость рядов по интегральному признаку:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ (α – действительное число)

Решение.

1) Функция $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ удовлетворяет всем условиям приведенной теоремы. Исследуем сходимость интеграла (2) для этой функции:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{x+1}{x^2+1}dx=\lim_{b\to+\infty}(\ln\sqrt{x^2+1}+arctgx)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln\sqrt{b^2+1}+arctgb-\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4})=+\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и первый ряд.

2)Для второго ряда функция $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Исследуем сходимость интеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}dx=\lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{\ln(x+1)})\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln(b+1)})=\frac{1}{\ln 2}.$$

Интеграл сходится, поэтому сходится и второй ряд.

3)При α ≤ 0 рассматриваемый ряд расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости. Пусть α > 0. Функция $f(x)=\frac{1}{x^a}$ удовлетворяет всем условиям теоремы:

Если α ≠ 1, то $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-a}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-a}}{1-a}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-a}}{1-a}=\begin{cases}\frac{1}{a-1}, & a>1\\ +\infty & a<1\end{cases}$

Если $a=1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln b=\infty.$

Следовательно, при α ≤ 1 данный ряд расходится, а при α > 1 – сходится.

2. Признак Даламбера и Коши

Теорема (признак Даламбера). Пусть дан положительный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (1) причем $a_n>0\ \forall n=1,2,\ldots$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$ (2)

Тогда: 1) при $l<1$ряд (1) сходится,

2) при $l>1$- расходится,

3) при $l=1$ ряд (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Доказательство. В силу (2) для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что $\forall n\geq N$ имеем:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon \Leftrightarrow l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon$$

1) Пусть $l<1$.Возьмем $\varepsilon>0$ такое, что $\varepsilon<1-l$. Тогда $l+\varepsilon=q<1$ и начиная с номера N будем иметь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q< \text{ или } a_{n+1}<qa_n \qquad (3)$$

Пусть n=N, N+1, N+2, … . Тогда из неравенства (3) получим:

$$a_{N+1}<aNq,$$
$$a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{N+m}<a_Nq^m,$$

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим ряды:

$$a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots+a_{N+m}+\ldots, \qquad (4)$$

$$a_Nq+a_Nq^2+\ldots+a_Nq^m+\ldots\ . \qquad (5)$$

Так как 0 < q <1, то ряд (5) сходится. Поэтому по признаку сравнения (в силу неравенства (3)) сходится и ряд (4), являющийся остатком ряда (1). Следовательно, ряд (1) сходится.

2) Пусть $l > 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon < l - 1$, т.е. $l - \varepsilon > 1$.

Тогда начиная с некоторого номера N будем иметь:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Отсюда видно, что начиная с некоторого номера N, члены положительного ряда монотонно возрастают и поэтому необходимое условие сходимости ряда (1) не выполняется. Следовательно, ряд (1) расходится.

3) В случае $l = 1$ ряд может быть как сходящими, так и расходящимся.

Например для рядов: $1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$ и $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots$

соответственно имеем: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ и $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

Но первый ряд сходится, а второй – расходится.

Теорема (признак Коши). Пусть для положительного ряда (1) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$

Тогда: 1) при l < 1 ряд (1) сходится,

2) при l > 1 – расходится,

3) при l = 1 вопрос остается открытым.

Теорема доказывается точно так же, как и признак Даламбера.

Примеры. 1) исследовать сходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4_n n^3}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Решение. 1) Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^2} \div \frac{3^n}{2^n n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2(n+1)^2} = 1{,}5 * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1{,}5 > 1.$$

Следовательно, ряд 1) расходится.

2) По признаку Даламбера получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}(n+1)^3}{5^{n+1}}\div\frac{4^n n^3}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^3}{5n^3}=\frac{4}{5}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

3) В этом примере применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Если при применении признака Даламбера или Коши получим $l = 1$, то надо применить другие методы исследования. Перейдем к признаку, который часто применяется при $l = 1$.

Тема занятия №14: Элементы множества. Операции над их множествами и их свойства.

План:

1. **Элементы множества.**
2. **Операции над множествами.**
3. **Способы задания множеств.**
4. **Основные свойства операций над множествами.**

1.Элементы и множества.

Множество — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики. Понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, то есть не сводимое к другим понятиям, а значит и не имеющее определения. Однако, можно дать описание множества, например в формулировке Георга Кантора: Под «множеством» мы понимаем соединение в некое целое M определённых хорошо различимых предметов m нашего созерцания или нашего мышления (которые будут называться «элементами» множества M).До XIX века математиками рассматривались в основном конечные множества.Основы теории конечных и бесконечных множеств были заложены Бернардом Больцано, который сформулировал некоторые из её принципов.С 1872 г. по 1897 г. (главным образом в 1872—1884 гг.) Георг Кантор опубликовал ряд работ, в которых были систематически изложены основные разделы теории множеств, включая теорию точечных множеств и теорию трансфинитных чисел (кардинальных и порядковых). В этих работах он не только ввёл основные понятия теории множеств, но и обогатил математику рассуждениями нового типа, которые применил для доказательства теорем теории множеств, в частности впервые к бесконечным множествам. Поэтому общепризнано, что теорию множеств создал Георг Кантор.Множество - это совокупность, набор элементов, объединенных общими свойствами. Множества обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C… , а элементы множества строчными латинскими буквами a, b, c,…Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества или точками множества. Элементы в множество входят по одному разу, т.е. без повторений. Множество, которое не содержит ни одного элемента называется пустым и обозначается Ø. Основные числовые множества:

N-$\{1,2,3,...,n\}$ Множество всех натуральных чисел

Z-$\{0, \pm1, \pm2, \pm3,...\}$ Множество целых чисел. Множество целых чисел включает в себя множество натуральных.

Q-Множество рациональных чисел.

I - Множество иррациональных чисел.

R-Множество всех вещественных чисел($-\infty; +\infty$)

Порядком множества называется число его элементов. Если множество состоит из конечного числа элементов, то его порядком называется количество элементов. Если множество содержит бесконечное число элементов, оно называется бесконечным. Из бесконечных множеств можно выделить множества, элементы которых можно пронумеровать (множество натуральных чисел, множество, состоящее из членов арифметической или геометрической прогрессии, и т.д.)- счетные множества. Множества можно задавать характеристическим свойством. Например, $Q = \{m/\ n|$

$m \in Z; n \in N$ }- множество рациональных чисел, состоящее из дробей, в числителе которых стоит целое число, а в знаменателе – натуральное.

Наглядную иллюстрацию множеств дают диаграммы Эйлера - Венна, в которых элементы множеств изображаются точками некоторых кругов.

Множество A называется **подмножеством** множества $B(A \in B)$,если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

Любое множества есть подмножество самого себя, пустое множество является подмножеством любого множества. Если $A \in B$ и $B \in A$, то множество A и B состоят из одних и тех же элементов и называются **равными** $(A = B)$ **.** Если A- непустое подмножество множества B и $A \neq B$, то A называют **собственным подмножеством** множества B. Подмножество множества представлено

2.Операции над множествами.

Пусть даны множества A и B.

1) **Объединением** множеств A и B называется множество C $(A \cup B = C)$, элементами A или элементами B.

2) **Пересечением множеств** A и B называется множество C $(A \cap B = C)$,элементы которого являются элементами A и элементами B одновременно.

3) **Разностью** множеств A и B $(A|B)$ называется множество $C(A|B=C)$,элементы которого являются элементами A и не принадлежат B.

4) **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество упорядоченных пар (x, y), где $x \in A, y \in B$: $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

Рассмотрим еще некоторые примеры множеств.

5) Множество целых чисел есть объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и множества, состоящего из числа 0: $N \cup \{-n | n \in N\} \cup \{0\}$.

6) Перечислением двух прямых (не обязательно различных) в пространстве может быть пустое множество (параллельные или скрещивающиеся прямые), точка (пересекающиеся прямые) или бесконечное множество точек (прямая, совпадающая с двумя заданными).

7) Разностью множества точек отрезка AB и множества точек, одинаково удаленных от точек A и B (плоскость, перпендикулярная AB и проходящая через его середину), являются все точки отрезка AB, кроме его середины.

8) Координатная плоскость является декартовым произведением двух координатных прямых:$R \times R = R^2$

9) Функцией с областью определения D и множеством значений E называется любое подмножество декартова произведения $D \times E$,удовлетворяющее условию функциональности (если F-подмножество $D \times E$: $F \in D \times E$ и пары $(x, y_2) \in F$,то $y_1 = y_2$).

3.Способы задания множеств.

Множества могут быть заданы списком, порождающей процедурой, арифметическими операциями, описанием свойств элементов или графическим представлением.

1) Задание множеств **списком** предполагает перечисление элементов. Например, множество *A* состоит из букв *a,b:A={a,b,c,d}* или множество *N* Пример: {0,2,3,4}={4,0,2,3}=….

2) Задание множеств **порождающей процедурой** или арифметическими операциями означает описание характеристических свойств элементов множества: $X=\{x|H(x)\}$, т.е. множество *X* содержит такие элементы *X*, которые обладают свойством *H (x)*. Например: $B= \{\, b \;|= \frac{n}{2} \pm kn, k \in N\}$, *N*- множество всех натуральных чисел; $M\frac{n}{2} = 1,2,4,8,16,\ldots$или $M\frac{n}{2} =\{m|m=2^{n},\ n \in N\}$; $C=A+B=\{x|x=a+b, a\in A, b\in B\}$.

3) Задание множества **описанием свойств** элементов: например, *M*- это множество чисел, являющихся степенями двойки.

К описанию свойств естественно предъявить требования точности и недвусмысленности. Так «множество всех хороших песен 2012 года» каждый составит по-разному. Надежным способом однозначного задания множества является использование разрешающей процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и соответственно является ли элементом рассматриваемого множества.

Например, S- множество успевающих студентов. Разрешающей процедурой включения в множество S является отсутствие неудовлетворительных оценок в последней сессии.

4) **Графическое** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Замкнутая линия - круг Эйлера- ограничивает множество, а рамка- универсальное пространство *E.* Заданы два множества: $A=\{b,a,c\}$ и $B=\{b,d, e, f\}$. Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно(показано на рисунке).

4.Основные свойства операций над множествами.

Из определений объединения и перечисления множеств следует, что операции перечисления и объединения обладают следующими свойствами:

1. **Коммутативность.** $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
2. **Ассоциативность.** $(A \cup B) \cup C = A(B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. **Дистрибутивность.** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
4. $A \cup A = A, A \cap A = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
6. **Законы де Моргана (законы двойственности).**
   1) $C(A \cup B) = CA \cap CB$;
   2) $C(A \cap B) = C A \cup CB$.

Доказательство данных свойств проводится на основе определения равенства двух множеств.

Тема занятия №15: Графы. Элементы графов

План:

1. **Основные положения теории графов.**
2. **Свойства графов.**
3. **Основные виды графов.**
4. **Действия с графами.**

1.Основные положения теории графов.

Теория графов - раздел математики, особенность которого- геометрический подход к изучению объектов. Родоначальником теории графов принято считать математика Леонарда Эйлера (1707-1783). Задача о Кенигсбергских мостах и подобные ей задачи вместе с совокупностью методов их исследования составляют очень важный в практическом отношении раздел математики, называемый теорией графов. Первая работа о графах принадлежала Л. Эйлеру и появилась в 1736 году. Издавна среди жителей Кёнигсберга была распространена такая загадка: как пройти по всем мостам (через реку Преголя), не проходя ни по одному из них дважды? Многие кёнигсбержцы пытались решить эту задачу как теоретически, так и практически, во время прогулок. Но никому это не удавалось, однако не удавалось и доказать, что это даже теоретически невозможно. В 1736 году задача о семи мостах заинтересовала выдающегося математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера, о чём он написал в письме итальянскому математику и инженеру Мариони от 13 марта 1736 года. В этом письме Эйлер пишет о том, что он смог найти правило, пользуясь которым легко определить, можно ли пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них (в случае семи мостов Кёнигсберга это невозможно).

На упрощённой схеме части города (графе) мостам соответствуют линии (дуги графа), а частям города — точки соединения линий (вершины графа). В ходе рассуждений Эйлер пришёл к следующим выводам:

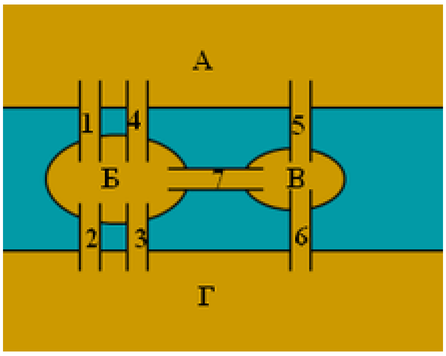
Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа должно быть чётно. Не может существовать граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.

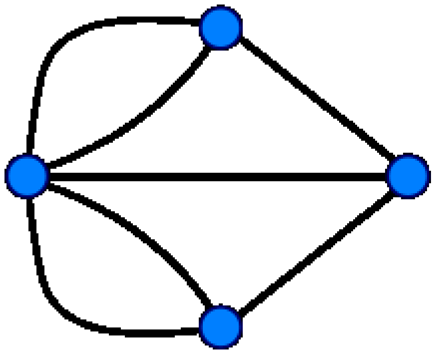
Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.

Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кёнигсбергских мостов имел четыре нечётные вершины (то есть все), следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды.

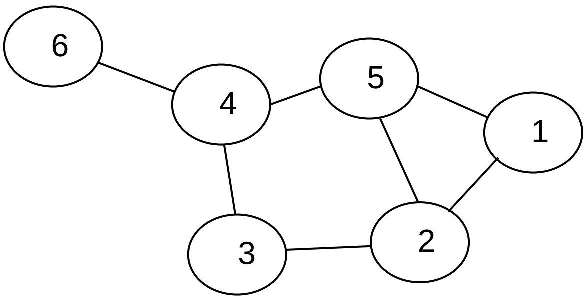
В дальнейшем над графами работали Кениг (1774-1833), Гамильтон (1805-1865), из современных математиков - К. Берж, О. Оре, А. Зыков. С помощью графов часто упрощалось решение задач, сформулированных в различных областях знаний: в автоматике, электронике, физике, химии и др. С помощью графов изображаются схемы дорог, газопроводов, тепло и электросети. Помогают графы в решении математических и экономических задач. Графы формально описывают множество близких ситуаций. Самым привычным примером служит карта автодорог, на которой изображены перекрестки и связывающие их дороги. Перекрестки являются вершинами графа, а дороги - его ребрами.





Основное понятие теории - **граф -** задается множеством вершин (точек) и множеством ребер(связей), соединяющий некоторые пары вершин. Пример графа - схема метрополитена; множество станций (вершины графа) и соединяющих их линий(ребра графа).

На рисунке пример простейшего графа,у которого 6 вершин и 7 ребер.



Граф – совокупность точек и линий, в которой каждая линия соединяет две точки. Точки называются вершинами графа, линии ребрами граф. Если ребро соединяет две вершины, то говорят, что оно им **инцидентно**, а вершины, соединенные ребром, называются **смежными.** Две вершины**,** соединяемые ребром, могут совпадать; такое ребро называется петлей. Число ребер, инцидентных вершине, называется **степенью** вершины. Если два ребра инцидентны одной и той же паре вершин, они называются **кратными;** граф, содержащий кратные ребра, называется **мультиграфом.**

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой; в этом случае оно называется **направленным,** или **ориентированным,** и изображается стрелкой. Граф, в котором все ребра ориентированные, называется ориентированным графом (**орграфом)**; ребра орграфа часто называют **дугами.** Дуги именуются кратными, если они не только имеют общие вершины, но и совпадают по направлению. Граф 2- ориентированный; дуги *d* и *f*- кратные.

Граф однозначно задан, если заданы множество его вершин, множество ребер и указаны все инцидентности (т.е. указано, какие вершины какими ребрами соединены). Наиболее наглядно граф задается рисунком; однако не все детали рисунка одинаково важны; в частности, несущественны геометрические свойства ребер (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости. Для машинной обработки более удобны символические представления графов, в которых несущественных геометрических деталей нет, например представление графа списками вершин и ребер. Граф 1 задается списком вершин{1,2,3,4} и списком ребер, в котором для каждого ребра указана пара инцидентных ему вершин: a(1,2) b:(1,2) c(2,3) d:(2,4) e:(3,4) f:(2,4) g:(3,3)

Такой же список ребер имеет и граф 3; поэтому графы 1 и 3 равны, хотя их рисунки заметно отличаются.

Для неориентированного ребра порядок, в котором указаны соединяемые их вершины, неважен. Для ориентированного ребра это важно: первой указывается вершина, из которой выходит ребро. Например, орграф 2 получен из графа 1 введением ориентации ребер; однако, для того чтобы приведенный выше список ребер описывал граф 2, в нем нужно изменить описание ребер *c* и *d-c:(3,2)* и *d:(4,2).*

Граф может вовсе не иметь ребер; тогда он состоит из изолированных вершин и называется пустым.

Если в неориентированном графе с *n* вершинами нет кратных ребер и петель, то максимальное число ребер в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Это соответствует случаю, когда между любыми двумя вершинами есть ребро; такой граф называется полным.

Маршрут- это последовательность ребер в неориентированном графе, в котором конец каждого ребра совпадает с началом следующего ребра. Число ребер маршрута называется его длинной. Цикл - это замкнутый маршрут, т.е. маршрут, в котором начальная вершина совпадает с конечной. Неориентированный граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами есть маршрут. Орграф считается связным, если он связан без учета ориентации его дуг. Связный граф с *n* вершинами содержит не менее *n-1* ребер. Орграф называется сильно связным, если из любой вершины в любую другую существует путь. Граф 2 – связный, но не сильно связный, так как в вершину 1 нет путей из всех вершин.

Путь называется простым, если всего его вершины различны. Замкнутый путь, в котором все ребра различны, называется циклом. Простой цикл – это замкнутый путь, все вершины которого попарно различны. Гамильтоновым называется граф, в котором существует простой цикл, содержащий все вершины графа (но не обязательно все его ребра).

Степень вершины deg(u) графа – это число ребер, инцидентных данной вершине **u,** причем петли учитываются дважды. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

Если сложить степени всех вершин некоторого графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2, поэтому справедливо следующее утверждение: $\sum_{a\in v}\deg(a)=2m$.

Это равенство известно как «лемма о рукопожатиях». Из него следует, что число вершин нечетной степени в любом графе четно.

Вершину степени 0 называют изолированной.

Граф называют регулярным степени *d*, если степень каждой вершины равна *d*.

Граф, не содержащий петель и кратных ребер, называется **обыкновенным,** или **простым, графом(simple graph).** Во многих публикациях используется другая терминология: под графом понимается простой граф, граф с кратными ребрами называют **мультиграфом,** с петлями – **псевдографом.**

Некоторые классы графов получили особые наименования. Граф с любым количеством вершин, не содержащий ребер, называется **пустым.** Обыкновенный граф с *n* вершинами, любая пара вершин которого соединена ребром, называется **полным** и обозначается K_n (очевидно, что в полном графе $n\ (n\text{-}1)/2$ ребер).

Граф, вершины которого можно разбить на непересекающиеся подмножества V_1 и V_2 так, что никакие две вершины, принадлежащие одному и тому же подмножеству, не смежны, называется **двудольным (**или бихроматическим, или графом Кенига)и обозначается $B_{mn}\ (m=|V_1|,\ n=|V_2|,\ m+n=|V|)$.

Двудольный граф или **биграф, -** это математический термин теории графов, обозначающий граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, т.е. не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Полный двудольный граф – такой двудольный граф, что каждая вершина множества V_1 связана со всеми вершинами множества V_2, и наоборот; обозначение - K_{mn}. Замечание: *полный двудольный* граф B_{mn} не является *полным* (за исключение $B_{11} = K_2$).

Понятие графа благодаря его наглядности и высокой общности используется часто в информатике и служит основным средством для описания структуры сложных объектов и функционирования систем. При описании структур вершинами являются компоненты объекта, а ребрами – связи между ними (примеры- вычислительные сети, логические схемы, иерархические структуры. При описании функционирования вершинам соответствуют состояния системы, а ребрам – переходы между состояниями (примеры – граф переходов автомата; граф игры, в котором вершины изображают позиции, а дуги – ходы, переводящие одну позицию в другую). Иногда описание в виде графа содержит эти обо аспекта. Например, вершины сетевого графика или блок схемы алгоритма представляют его компоненты (работы, операторы), а прохождение по путям изображает передачу активности от одной компоненты к другой, т.е. процесс функционирования.

2.Свойства графов.

1. Число нечетных вершин графа всегда четно. Не существует графа, имеющего нечетное число нечетных вершин.

2. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком начертить граф, начав движение с любой из вершин и закончив его в ней же.

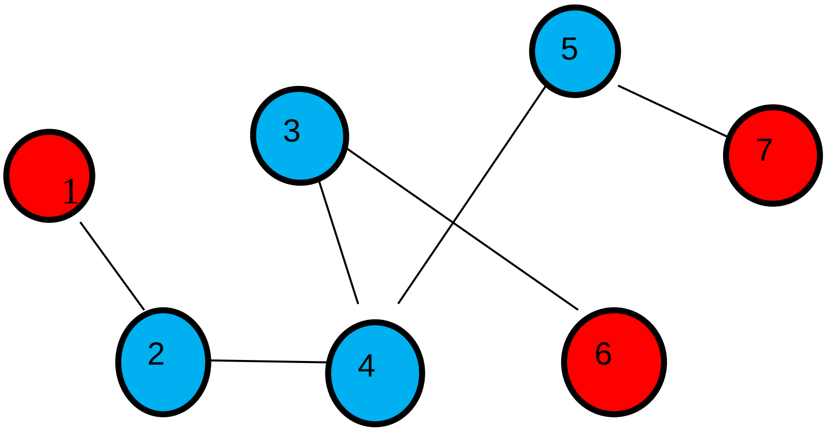
3. Граф только с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить в другой.

4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить с одним росчерком.

3.Основные виды графов.

1. Дерево – это неориентированный связный граф без циклов. Дерево с n вершинами всегда имеет

(n - 1) ребер. Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный маршрут (если бы его не было, нарушилась бы связность, а если бы было два маршрута с одинаковыми концами, то получился бы цикл). Поэтому дерево иногда определяется как минимальный связный граф, т.е. граф, в котором удаление любого ребра нарушает связность. Вершина дерева которая соединена ребром только с одной вершиной, называется висячей вершиной, или листом. В любом дереве, содержащем более одной вершины, имеется не менее двух листьев. На рисунке граф 1 представляет пример неориентированного дерева. Его листья являются вершины 1, 6 и 7.



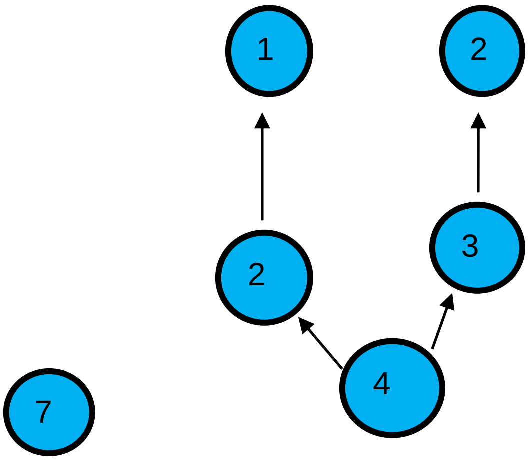
Деревом называется связный граф без циклов.

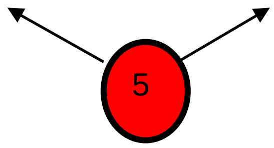
Корневое дерево – это связный орграф без циклов, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Имеется ровно одна вершина, называемая корнем, к которой не ведет ни одной дуги;
2) К каждой вершине, отличной от корня, ведется ровна одна дуга;
3) Преемники всякой вершины упорядочены.

Вершины корневого дерева, не имеющие преемников, называются листьями.

Ориентированное дерево – это граф с выделенной вершиной (корнем), в которой между корнем и любой вершиной существует единственный путь. При этом возможны два варианта ориентации: либо все пути ориентированы от корня к листьям, либо все пути ориентированы от листьев к корню. Ориентированное дерево можно получить из неориентированного дерева, выбрав в нем любую вершину в качестве корня и один из двух вариантов ориентации дуг.





Например, граф 2 получен из графа 1 выбором вершины 5 в качестве корня и ориентацией друг от корня к листьям (на рисунке). Если ориентацию всех дуг поменять на противоположную, то получится дерево с ориентацией от листьев к корню; если же поменять ориентацию только у частей дуг, то полученный граф не будет ориентированным деревом.

Деревья используются в различных математических моделях, связанных с информатикой: в теории формальных систем (дерево вывода); при описании и проектировании иерархических структур, в частности при организации больших массивов данных в информационных системах баз данных; в задачах планирования (дерево целей, дерево перебора вариантов); в теории игр (вершины – позиции игры, дуги – ходы, переводящие одну позицию в другую, корень – начальная позиция, листья – заключительные позиции).

2. И/ИЛИ граф – специальный тип графа, широко используемый в искусственном интеллекте и программировании, а так же в задачах теории принятия решений, исследовании операций и системном анализе. Граф такого типа описывает развитие некоторого процесса от начальной вершины графа к множеству конечных вершин. Все остальные (не начальная и не конечные) вершины делятся на два типа: вершины И и вершины ИЛИ. Вершина первого типа возбуждается только при наличии сигналов активизации на всех ее входах, а вершина ИЛИ – при появлении хотя бы одного сигнала активизации на любом из ее выходов. Активизированная вершина передает сигналы активизации на все сопряженные с ней вершины. Внешние сигналы активизации порождаются внешними источниками, которыми, в частности, могут быть выходные вершины других И/ИЛИ графов. Используя обозначения, принятые в алгебре логики, можно записать, что

$$Z_1 = x_2(x_1 \vee x_3),$$
$$Z_2 = x_1x_2x_3x_4,$$
$$Z_3 = (x_2 \vee x_3)x_4.$$

3. Иерархическая структура – это структура системы, части (компоненты) которой связаны отношениями включения или подчинения. Иерархическую систему имеют предприятия (завод состоит из цехов и служб управления и обеспечения, цеха – из участков, службы – из отделов и т.д.). Аналогично организованно административно-территориальная структура государств (например, республика – область – район – населенный пункт). При этом территории связанны отношениями включения: районы входят в область, а органы управления связанны отношениями подчинения – районные власти подчиняются областным. Армейские соединения (дивизия – полк – батальон – рота – взвод – отделение – солдат) также образуют структуру подобного типа.

Иерархическая структура изображается ориентированным деревом, в котором вершины соответствуют компонентам, а дуги – связям. Это дерево обычно располагается на плоскости следующим образом: наверху – корень дерева (1-й уровень иерархии), изображающий систему в целом (предприятие, государство) или центр, которому все подчинено (директор, правительство). Ниже на одной горизонтали – компоненты, непосредственно связанные с корнем (компоненты 2-го уровня – цеха, области). На следующей горизонтали – компоненты 3-го уровня (участки, районы), т.е.

компоненты, связанные с компонентами 2-го, и т.д. От каждой компоненты на верхний уровень идет только одна дуга, именно поэтому граф такой структуры является деревом. Листья этого дерева соответствуют нижним компонентам структуры. Длина пути вершины к корню равна числу более высоких уровней, т.е. «вышестоящих предприятий». В административных структурах пути в дереве, как правило, отражают и информационные потоки: сверху-вниз – руководящие указания, снизу-вверх – отчетность и оперативная информация. Поскольку путь от любой вершины к корню в дереве единственен и определяется списком содержащихся в нем вершин, его можно использовать для идентификации компонентов системы.

Возможно иерархические структуры, в которых связи между уровнями не обязательно образуют дерево. Так будет, например, если у подчиненного есть несколько начальников верхнего уровня, функция между которыми разделены, а сами эти начальники друг другу не подчиняются. Так, руководитель предприятия должен исполнять указания директора объединения, куда входит это предприятие, но он же подчиняется указаниям санэпидстанции.

4.Действия с графами.

Поскольку графы можно рассматривать как частные случаи бинарных отношений, то для них могут быть определенные аналогичные операции. Укажем некоторые из них.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ - два графа.

Объединение графов G_1 и G_2 есть граф, у которого $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Соединение графов $G_1 + G_2$ есть граф у которого $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2)\}$ для всех $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Прямое произведение графов есть граф, у которого $V = V_1 * V_2$, $((c_1, c_2),(v_1, v_2)) \in E \Leftrightarrow (c_1, v_1) \in E$ и $(c_2, v_2) \in E_2$.

Тема занятия №16: Основные понятия комбинаторики.

При изучении курса математической статистики приходится использовать методы одного из разделов математики, который хотя формально и не относится высшей, вузовской математике, но, к сожалению, не изучается в средней школе. Этот раздел – комбинаторика, «наука о способах подсчетов вариантов». Эта наука имеет тот же примерно 300 –летний возврат, что и статистика. Комбинаторика сверстница теории вероятностей, теоритического фундамента прикладной статистики, она изучает простейшие соединения. Как и в древней, в современной статистике невозможно обойтись без навыков просчитать в уме или по крайней мере быстро, по простым формулам, варианты событий, размещений предметов, значений величин и т.п.

Рассмотрим пример решения практического вопроса с использованием правил комбинаторики. Пусть решается вопрос об установлении проводной связи между 10 предприятиями фирмы по следующему принципу – каждое предприятие должно иметь отдельный канал связи со всеми остальными. Сколько таких каналов придется установить в фирме?

Для решения вопроса можно нарисовать выпуклый 10-угольник и провести в нем диагонали, пересчитав в конце их число и забыв добавить число сторон. Человек, знающий комбинаторику, укажет верный ответ – всего требуется 45 каналов. Для освоения наиболее популярных применений комбинаторики рассмотрим ее основные понятия – перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками называют операции над упорядоченным рядом из n различных объектов, в процессе которых «списочный состав» ряда не изменяется, но «места» объектов в этом ряду изменяются от вариантов к варианту. Количество перестановок – это количество новых упорядоченных множеств, составленных из данного множества с тем же количеством элементов. Попробуем найти число простановок в ряду из 1, 2 и 3 предметов.

Воспользуемся для этого простенькой схемой:

$n = 1 \quad A \qquad 1 \text{ вариант}$

$n = 2 \quad AB \quad BA \quad 1*2 = 2 \text{ вариант}$

$n = 3 \quad ABC \quad ACB \quad BCA \quad BAC \quad CAB \quad CBA \quad 1*2*3 = 6 \text{ вариант}$

Можно доказать строго, что в общем случае число перестановок в ряду из n элементов составит:

$$P_n = n! = 1*2*3...(n-1)*n$$

n! – факториал числа n – произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n.

Свойства перестановок: 1! = 1; 0! = 1.

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1,2,3\}$.

Составим все перестановки чисел этого множества: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Их 6.

Вычислим по формуле $P_3 = 3! = 1*2*3 = 6$

Размещениями из *n* элементов по m элементам A_n^m называют конечные упорядоченные множества, содержащие *m* элементов, выбранных из *n* элементов множества *A*. то есть количество размещений – это количество новых упорядоченных множеств составленных из данного множества с другим количеством элементов. Число всевозможных размещений вычисляется по формуле $A_n^m = \dfrac{n\,!}{(n-m)!}$

Свойства размещений: $A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n\,!$

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1,2,3\}$.

Составим все размещения двух чисел этого множества: 12, 21, 13, 31, 23, 32. Их 6.

Вычислим по формуле $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{1*2*3}{1} = 6$.

Сочетаниями называют операции над множеством из n различных объектов, в процессе которых образуются подмножества из k элементов, взятых из исходного множества, так, чтобы варианты подмножеств отличались друг от друга хотя бы одним элементом. То есть количество сочетаний – это количество множеств, составленных из данного множества с другим количеством элементов.

Опустим доказательство формулы для расчета числа сочетаний в общем виде и приведем примеры для числа сочетаний из 3 по 2и из 5 по 3.

Если элементы исходного множества A, B, C.

Варианты подмножеств: AB, AC, BC – всего три.

Если элементы исходного множества: A, B, C, D, E.

Варианты подмножеств: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE – всего десять.

Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать *m* – элементные подмножества, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название ***из n элементов по m***, а их общее число определяется по формуле $C_n^1 = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{(n-1)...(n-m+1)}{m!}$.

Свойство сочетаний: $C_n^m = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$.

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1,2,3\}$.

Составим все сочетания двух чисел этого множества: 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Их 3.

Вычислим по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1*2*3}{1*2*1} = 3.$$

Существует еще один способ вычисления числа сочетаний из n по m – с использованием коэффициентов в развернутой формуле бинома Ньютона $(p + q)^n$. В самом деле, например, при $n = 3$ коэффициенты при степенях разложения составляет 1, 2, 3 и 4 элементов.

С помощью сочетаний рассчитывается треугольник Паскаля, который заполняется значениями, если $m \le n$.

n \ m	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Проверяется треугольник Паскаля просто: первый элемент любого основания равен 1, второй номеру основания, а все последующие – сумме двух «вышестоящих» (верхнего и левого).

Для чисел C_n^m, называемых также биноминальными коэффициентами, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойство симметрии);

$C_n = 1^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^0 = 1$(рекуррентное соотношение);

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ (следствие биноминальной формулы Ньютона).

Для любого натурального n верна формула, называющая биномом Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0\ a^n + C_n^1\ a^{n-1}b + ... + C_n^m\ a^{n-m}b^m + ... + C_n^n\ b^n$.

Коэффициенты C_n^m, равны е числу сочетаний из n элементов по m, называются биноминальными коэффициентами. Частные случаи бинома Ньютона (n = 2; 3) входят в список формул сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

«Основные формулы комбинаторики»

Понятия	Формулы для вычисления	Основные свойства
Перестановки	$P_n = n! = 1*2*3*...*n$	1! = 1; 0! = 1.
Размещения	$A_n^m = \frac{n\ !}{(n-m)!}$	$A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n\ !$
Сочетания	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	$C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$.

Тема занятия №16: Основные понятия теории вероятности.

План:
1. **Классическое определение вероятности**
2. **Теоремы сложения и умножения вероятностей.**
3. **Закон больших чисел**

1.Классическое определение вероятности.

Теория вероятности-раздел математики, в котором по данным вероятностям одних случайных событий находят вероятности других событий, связанных количественным образом с первыми. Теория вероятностей изучает также случайные величины и случайные процессы. Одна из основных задач теории вероятности состоит в выяснении закономерностей, возникающих при взаимодействии большого числа случайных факторов. Математический аппарат теории вероятности используется при изучении массовых явлений в науке и технике. Методы теории вероятности играет важную роль при обработке статистических данных.

Теория вероятности - наука, изучающая законы, управляющие случайными явлениями.

Примеры случайных явлений:

- бросаем монету, нельзя утверждать, как она упадет: гербом или решкой;
- вынимаем карту из колоды, нельзя сказать, какой она будет масти;
- количество забракованных изделий ОТК на заводе.

Эти примеры относятся к области случайных явлений. **Случайным** событием(или просто «событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Например, в опыте «бросание монеты» может произойти (а может не произойти) события А – « выражение герба».

Теория вероятности позволяет нам измерять количественно степень « правдоподобие» (или вероятность) различных событий. Ясно, что не все случайные события одинаково вероятны, что среди них бывают более или менее вероятные. Например, опыт «бросание игральной кости». Какое событие в этом опыте более вероятно?

А – «выпадение шести очков»;

В – «выпадение четного числа очков».

Событие может быть маловероятным, но возможным.

Например, в книге 500 страниц, на какой-либо из них напечатано формула. Раскрыв книгу наугад, маловероятно, что мы наткнемся на формулу.

Вероятность – количественная оценка возможности появления данного случайного события. Вероятность возникновения случайного события есть отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

Р = $\frac{m}{n}$, где Р – вероятность данного случайного события, m – количество благоприятны исходов для данного события, n – общее число исходов для данного события. Эту формулу называют классическим определением вероятности.

Однако это определение весьма неполно, что может подтвердить простой пример.

Давайте посчитает вероятность того, что при бросании двух игральных костей по крайней мере на одной выпадает 6. Очевидно, что каждая кость может выпасть шестью различными способами. Число всех возможных случаев равно $6*6 = 36;$ число благоприятствующих случаев равно 11 (6 – 1, 6 – 2, 6 – 3, 6 – 4, 6 – 5, 6 – 6, 5 – 6, 4 – 6, 3 – 6, 2 – 6, 1 – 6). Таким образом, вероятность равна 11/36. Мы знаем, что это правильное решение.

Но ведь можно рассуждать и по-другому. Числа очко, выпавшие на обеих костях, могут образовать 6*7/2=21 различных комбинаций. 6 из них благоприятствующие (6 – 6, 6 – 5, 6 – 4, 6 – 3, 6 – 2, 6 – 1). Вероятность равна 6/21. Этот результат явно отличается от предыдущего. Однако, пользуясь нашим определением, мы не сможем найти ошибку.

Таким образом, придется дополнить определение: вероятность – это отношение числа случаев, благоприятствующих изучаемому событию, к полному числу возможных случаев, при условий, что эти случаи равновероятны.

Единица измерения в теории вероятности – вероятность достоверного события.

Достоверным называется такое событие, которое в данном опыте непременно произойдет. Например, «выпадение не более шести очков при бросании игральной кости» - достоверное.

Невозможным называется событие, которое в данном опыте вовсе не может произойти. Например, «выпадение отрицательного числа очков при бросании игральной кости».

Вероятность достоверного события = *1*, вероятность невозможного события = *0*.

Вероятность случайного события *A* обозначается P(A), значит $0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность любого события *A* может быть подсчитана как отношение числа случаев, благоприятных событию *A*, к общему числу случаев.

$P(A) = m_A / n$, где n – общее число случаев; m_A – число случаев, благоприятных событию *A* (обеспечивающих его появление).

Рассмотрим пример.

В ящике – 20 шаров, из них 9 зеленых, 6 красных и 5 черных. Какова вероятность взять наугад красный шар?

Решение:

Событие А заключается в том, что взятый произвольно шар красного цвета.

$$P_A = m_A / n = 6/20 = 3/10 = 0{,}3 = 30\%.$$

Ответы можно записывать по разному: в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби, количеством процентов.

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных исходов $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **несовместными**, если они взаимно исключают друг друга, т.е. не могут появится вместе.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **равновозможными**, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность (вероятность) появления каждого из них .

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют **полную группу,** если они исчерпывают собой все возможные исходы, т.е. не может быть так, чтобы в результате опыта ни одно из них не произошло.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обладают всеми тремя свойствами, то они называются **случаями**, а про опыт говорят, что он сводится к схеме случаев.

Два события А и В называют независимыми, если появление одного из них никак не влияет на появление другого, т.е. условная вероятность события А в предположении, что В произошло, совершенно такая же и без этого предположения: $P(A/B) = P(A)$.

В противном случае события Аи В называются **зависимыми**.

2.Теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Теорема сложения вероятностей.

Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий (все равно, какое именно), равна сумме вероятностей этих событий.

Запишем это правило в виде формулы. Пусть А и В – два несовместных события. Тогда:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B).$$

Это правило обобщается на любое число событий.

Рассмотрим пример.

В ящике – 20 шаров, из них 9 зеленых, 6 красных и 5 черных. Какова вероятность взять наугад красный или зеленый шар?

Решение:

Событие A заключается в том, что взятый шар красного цвета.

Событие B заключается в том, что взятый шар зеленого цвета.

$P_A = m_A/n = 6/20;$

$P_B = m_B/n = 9/20;$

$P = 6/20 + 9/20 = 15/20 = 3/4=0,75 = 75\%.$

Ответ: 75%

Вероятность может быть записана в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби или в процентах.

Из теоремы сложения вероятностей вытекают некоторые важные следствия:

1) Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместимы и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.

2) Если A – какое – то событие, а $\overline{A}$ - противоположное ему (состоящее в непоявлении А), то $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

На последней формуле основан очень распространённый в теории вероятностей прием «перехода к противоположному событию». Часто бывает, что вероятность интересующего нас события A вычислить трудно, а вероятность противоположного ему - $\overline{A}$ - легко. Тогда вычисляют $P(\overline{A})$ и вычисляют его из единицы.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность совмещения двух событий (т.е. совместно появления того и другого) равна вероятности одного из них, умноженной на вероятность другого, вычисленную при условии, что первое произошло.

В виде формулы это правило запишется так:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) * P(B/A),$$

где $P(B/A)$ – так называемая условная вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло.

При использовании правила умножения вероятностей совершенно все равно, какое из событий считать «первым», а какое «вторым». Правило умножения можно записать в виде

$$P(A \text{ и } B) = P(B) * P(A/B).$$

Рассмотрим пример.

Бросили два игральных кубика. Какова вероятность появления двух пятерок?

Решение:

1-й способ. Рассмотрим два события: событие A – на первом кубике выпала 5, событие B – на втором кубике – тоже 5.

$$P_A = 1/6, P_B\ 1/6.$$
$$P_{A \text{ и } B} = 1/6 * 1/6 = 1/36$$

2-й способ. Рассмотрим все возможные исходы при бросании игральных кубиков: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, **55**, 56, 61, 62, 63, 64, 65 ,66.

Общее число исходов равно 36. Благоприятный исход для нашего случайного события – 1. Значит, вероятность $P = 1/36$.

Ответ: 1/36.

3.Закон больших чисел.

Основным «показателем» любого события (факта) А является численная величина его вероятности Р(Ф), которая может принимать значения в диапазоне [0…1] – в зависимости от того, насколько это событие случайно. Такое смысловое определение вероятности не дает, однако, возможности указать путь для вычисления ее значения.

Поэтому необходимо иметь и другое, отвечающее требованиям практической работы определения термина «вероятность». Это определение можно дать на основании житейского опыта и обычного здравого смысла.

Если мы интересуемся событием А, то скорее всего можем наблюдать, фиксировать факты его появления. Потребность в понятии вероятности и ее вычисления возникает, очевидно, только тогда, когда мы наблюдаем это событие не каждый раз, либо осознаем, что оно может произойти, а может и не произойти. И в том и в другом случае полезно использовать понятие частоты появления события f_A – как отношение числа случаев его появления (благоприятных исходов или частостей) к общему числу наблюдений.

Интуиция подсказывает, что частота наступления случайного события зависит не только от степени случайности самого события. Если мы наблюдали за событием А всего пять раз и в трех случаях это событие произошло, то мало кто примет значение вероятности такого события равным 0,6 или 60%. Скорее всего, особенно в случаях необходимости принятия каких - то важных, дорогостоящих решений, любой из нас продолжит наблюдение. Здравый смысл подсказывает нам, что уж если в 100 наблюдениях событие А произошло 14 раз, то мы можем с куда большей уверенностью полагать его вероятность равной 14%.

Таким образом, мы сформулировали второе определение вероятности события – как предела, к которому стремится частота наблюдения за событием при непрерывном увеличении числа наблюдений. Теория вероятностей, специальный раздел математики, доказывает существование такого предела и сходимость частоты к вероятности при стремлении числа наблюдений к бесконечности. Это положение носит название центральной предельной теоремы, или **закона больших чисел**.

Другое название закона больших чисел - теорема Я. Бернулли. Она устанавливает, что при неограниченном увеличении числа испытаний частота случайного события сходится по вероятности к вероятности события. Это теорема была выведена первая для этого закона. Позднее во многих практических задачах теории вероятностей стали использовать теорему Чебышева: при достаточном большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.

Чтобы использовать эту теорему, необходимо проводить эксперимент и регистрировать частоту наблюдений, которая тем точнее даст нам вероятность, чем больше наблюдений проведено.

Ну, а как, если эксперимент невозможен (дорог, опасен или менять суть процессов, которые нас интересуют)? Иными словами, нет ли другого пути вычисления вероятности событий без проведения экспериментов?

Такой путь есть, хотя, как ни парадоксально, он все равно основан на опыте, опыте жизни, опыте логических рассуждений. Вряд ли кто – либо будет производить эксперименты, подбрасывая несколько сотен или тысячу раз симметричную монетку, чтобы выяснить вероятность выпадения числа 5 на игральном кубике и т.д.

Этот путь называется статистическим моделированием – использованием схемы случайных событий и с успехом используется во многих приложениях теоретической и прикладной статистики. Продемонстрируем этот путь, рассматривая вопрос о вероятностях случайных величин. Обозначим $P(\overline{A})$ величину вероятности того, что событие A не произойдет. Тогда из определения вероятности через частоту наступления события следует, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, что правильно читать так – вероятность того, что событие произойдет или не произойдет, равна 100 %, поскольку третьего варианта попросту нет.

Подобные логические рассуждения приведут нас более общей формуле сложений вероятностей. Пусть некоторое случайное событие может произойти только в одном из трех вариантов, т.е. пусть имеется система из трех несовместимых событий А, В и С.

Тогда очевидно, что

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1;$$

и столь же простые же рассуждения приведут к выражению для вероятности наступления одного из двух несовместимых событий (например, А или В)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

или одно из трех:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C); \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим чуть более сложный пример. Пусть нам надо найти вероятность события С, заключающегося в том, что при подбрасывании двух разных монет мы получим герб на первой (события А) и на второй (событие В) стороне. Здесь речь идет о совместном наступлении двух независимых событий, т.е. нас интересует вероятность $P(C) = P(A \cap B)$.

И здесь метод построения схемы событий оказывается чудесным помощником – можно достаточно просто доказать, что

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B).$$

Конечно же, рассматриваемые формулы годятся для любого количества событий: лишь бы они были несовместными в первом случае и независимыми во втором.

Наконец, возникают ситуации, когда случайные события оказываются взаимно зависимыми. В этих случаях приходится различать условные вероятности:

$P(A/B)$ – вероятность A при условии, что B уже произошло;

$P(A/\overline{B})$ – вероятность A при условии, что B не произошло, называя $P(A)$ безусловный или полной вероятностью события A.

$$P(A/B) * P(B) = P(B/A) * P(A).$$

Это весьма важное средство анализа, особенно в области проверки гипотез и решения вопросов управления на базе методов прикладной статистики.

Тема занятия №17: Математическая статистика и ее связь с теорией вероятности.

План:

1. **Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении.**
2. **Статистическое определение вероятности. Выборочный метод.**
3. **Интервальное распределение выборки. Статистические оценки параметров распределения.**
4. **Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия дискретной случайной величины.**

1. Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении.

Математическая статистика – раздел прикладной математики, наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов. Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятности, позволяющую оценить надежность и точность выводов. Этот раздел прикладной математики посвящен изучению случайных величин по результатам наблюдений.

Развитие статистической науки, расширение сферы практической статистической работы приветили к изменению содержания самого понятия «статистика». В настоящее время данный термин употребляется в трех значениях:

- под статистикой понимают отрасль практической деятельности, которая имеет своей целью сбор, обработку, анализ и публикацию массовых данных о самых различных явлениях общественной жизни (в этом смысле «статистика» выступает как синоним словосочетания «статистический учет»)
- статистикой называют цифровой материал, служащий для характеристики какой - либо области общественных явлений или территориального распределения какого – то показателя;
- статистикой называют отрасль знания, особая научная дисциплина, соответственно научный предмет в высший и средних специальных учебных заведениях. Медицинские работники, например, изучают санитарную статистику.

Задачи статистической науки:

1. Постоянные (долговременные): а) обеспечить органы управления государством, регионами, отраслями и отдельными предприятиями своевременной полной и достоверной информацией, необходимой для принятия решений; б) информировать общественность о явлениях и процессах, происходящих в обществе.
2. Актуальные задачи формируются исходя из потребности общества и экономики на современном этапе: а) получение объективной информации о деятельности хозяйственных структур4 б) создание автоматизированных баз данных о деятельности текущих хозяйственных структур с возможностью санкционированного доступа к ним для получения информации, необходимой для решения текущих хозяйственных задач; в) прогнозирование развития важных социально – экономических процессов и явления: г) распространение выборочных обследований во всех секторах общественной и экономической жизни; д) проведение организационно – методологической работы по постепенному переходу на систему национальных счетов.

Исследование массовых общественных явлений включает в себя следующие этапы (этапы статистического исследования):

1) сбор статистической информации и ее первичная обработка (статистическое наблюдение);
2) группировка и выборка результатов наблюдения в определенные совокупности;
3) обобщение и анализ полученных материалов.

На первом этапе статистического исследования формируются первичные статистические данные, или исходная статистическая информация, которая является фундаментом будущего статистического здания. Если при сборе первичных статистических данных допущена ошибка или материал оказался недоброкачественным, это повлияет на правильность и достоверность как теоретических, так и практических выводов. Поэтому статистическое наблюдение от начальной до завершающей стадии – получения итоговых материалов – должно быть тщательно продуманным и четко организованным.

Статистическое наблюдение представляет собой научно организованный по единой программе учет фактов, характеризующий явления и процессы общественной жизни, и сбор полученных на основе этого учета массовых данных. К статистическому наблюдению предъявляются следующие требования:

1) полнота статистических знаний (полнота охвата единиц изучаемой совокупности, сторон того или иного явления, а также полнота охвата во времени);
2) достоверность и точность данных;
3) их единообразие и сопоставимость.

Однако не всякий сбор сведений является статистическим наблюдением. О статистическом наблюдении можно говорить лишь тогда, когда изучаются статистические закономерности, т.е. такие, которые проявляются только в массовом процессе, в большом числе единиц какой – то совокупности. Поэтому статистическое наблюдение должно быть планомерным, массовым и систематическим.

На втором этапе совокупность делится по признакам различия и объединяется по признакам сходства, подсчитываются суммарные показатели по группам и в целом. С помощью различных методов изучаемые явления делятся на важнейшие типы, характерные группы и подгруппы по существенным признакам. С помощью группировок ограничивают качественно однородные в существенном отношении совокупности, что является предпосылкой для определения и применения обобщающих показателей.

На заключительном этапе анализа с помощью обобщающих показателей рассчитываются относительные и средние величины, дается сводная оценка вариации признаков, характеризуется динамика явлений, применятся индексы, балансовые построения, рассчитываются показатели, характеризующие тесноту связей в изменении признаков. С целью наиболее рационального и наглядного изложения цифрового материала он представляется в виде таблиц и графиков.

Статистическая совокупность – это множество явлений, имеющих один или несколько общих признаков и отличающихся между собой по значениям других признаков.

Единица совокупности – каждое отдельное явление, подлежащее учету, наделенное признаками сходства.

Учетные признаки – это свойство, характерная черта явления, подлежащая статистическому изучению.

Делятся на:

1) качественные (атрибутивные) – выражают существенное неотъемлемое свойство предмета. Противоположные качественные признаки называют альтернативными (мужчина – женщина, отличник – не отличник и т.д.);

2) количественные – отдельные значения различаются по величине (возраст, рост, вес).

Статистические данные – сведения о числе объектов какой – либо обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками. Являются исходным материалом для любого статистического исследования. На основании статистических данных можно сделать научно обоснованные выводы. Для этого статистические данные должны быть предварительно определённым образом систимазированны и обработаны.

Одним из основных методов обработки статистических данных является **выборочный метод**. При выборочном исследовании из всей совокупности отбирают некоторым образом определенное число объектов и только их подвергают исследованию.

Генеральная совокупность – совокупность всех исследуемых объектов. Генеральную совокупность образуют, например, все больные с данным диагнозом, все новорожденные дети и т.д. общую сумму членов генеральной совокупности называют ее объемом и обозначают буквой N. Теоретически объем генеральной совокупности ничем не ограничен ($N \to \infty$). Поэтому обычно изучается какая – то часть объектов генеральной совокупности – выборка.

Выборочная совокупность (выборка) – набор случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

2. Статистическое определение вероятности. Выборочный метод

Основными показателями выборки являются: 1) вариант, 2) объем, 3) размах, 4) частота, 5) относительная частота.

Вариант – количественное значение элемента выборки.

Объем выборки (будем обозначать буквой n) – число объектов выборки (например, если из 10 000 студентов для контрольной флюорографии отобраны 100 студентов, то объем выборки равен 100, а генеральной совокупности равен 10 000).

Размах выборки – разность между наибольшим и наименьшим значениями числовой выборки (буква W).

Частота значения выборки **–** количество данного варианта в выборке (n_i).

Относительные частоты выборки *(p_i)* – это отношения $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_i}{n}$.

Если из генеральной совокупности получена выборка объема n, причем x_1 появляется в ней n_1 раз, значение x_2 – n_2 раза и т.д. в этом случае числа n_1, n_2 , …, n_i называют **частотами значения выборки**, а отношения $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_i}{n}$ **относительными частотами значения выборки.**

Для частот должно выполнять условие $n_1 + n_2 + ... + n_i = n$, а для относительных частот

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_i}{n} = 1$$

Вариационный ряд представляет собой неубывающую числовую последовательность. Любую числовую выборку можно записать в виде вариационного ряда.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$, где $x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... x^{(n)}$.

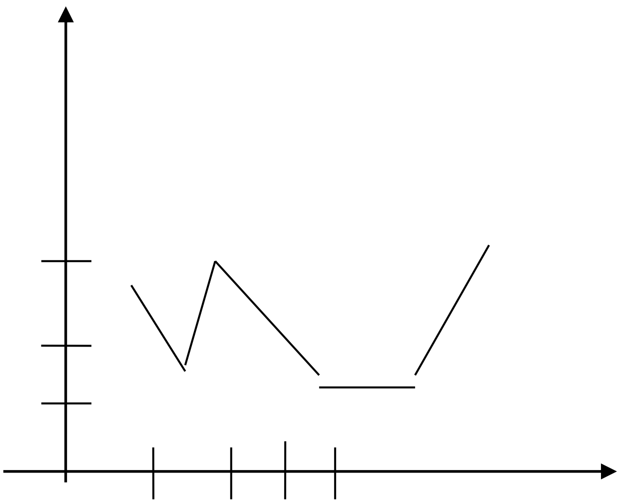
Статистический ряд – последовательность пар (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_i, n_i) или троек чисел (x_1, n_1, p_1), (x_2, n_2, p_2), ..., (x_i, n_i, p_i). Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, где x_i - значения варианта выборки, а n_i - частоты значения выборки, p_i - относительные частоты выборки.

x_1	x_2	$\dots$	x_i
n_2	n_2	$\dots$	n_i
p_1	p_2	$\dots$	p_i

Графические изображения выборки.

Для наглядного представления выборки часто используют различные графические изображения. Простейшими графическими изображениями выборки являются полигон и гистограмма. Пусть выборка задана статистическим рядом: (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_i, n_i). Полигоном выборки называется ломаная линия, которая наглядно иллюстрирует статистическое распределение дискретной выборки: полигон частот (x_i, n_i) и полигон относительных частот $(x_i, \frac{n_i}{n})$.

Полигон выборки приема 1.



Полигон позволит увидеть наибольшее (наименьшее) значение величин, динамику изменения дискретной случайной величины, разность между наибольшим и наименьшим значениями и т.д., в зависимости от того, что необходимо найти в задаче.

3. Интервальное распределение выборки. Статистические оценки параметров распределения.

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_i$. Наблюдавшиеся значения x_i , признака X называют вариантами. повторяемость признака x_i называется частотой n_i. Сумма всех частот равна *n*. Относительная частота - $p_i = n_i / n$ - выборочный аналог вероятности p_i появления значения x_i случайно величины X. тогда выборочным аналогом ряда распределения естественно считать вариационный ряд.

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная (расположенная в порядке возрастания или убывания) совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами p_i.

Аналогично полигону распределения строится полигон относительных частот. Нецелесообразно построение дискретного ряда для непрерывной случайной величины или для дискретной, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует построить интервальный ряд.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

При большом объеме выборки более наглядное представление дает гистограмма – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины *h*, а высоты равны относительной частоте или частоте.

Построив вариационный ряд и изобразив его графически, можно получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в ряду наблюдений. Однако на практике зачастую этого недостаточно. Такая ситуация возникает, например, когда имеется необходимость сравнить два ряда и более. Сравнительные распределения могут иметь различные средние значения случайной величины или различаться рассеиванием данных наблюдений вокруг указанных значений. Поэтому для дальнейшего изучения изменения значений случайной величины используют числовые характеристики вариационных рядов. Их обычно называют статистическими характеристиками, или оценками.

4. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия дискретной случайной величины.

В математической статистике вводятся числовые характеристики выборки аналогично числовым характеристикам случайных величин в теории вероятности.

Рассмотрим выборочные характеристики для выборки объемом *n*: $x_1, x_2, ..., x_n$.

Математическое ожидание – это среднее значение случайной величины. Для дискретной случайной величины математическим ожиданием *M (X)* называется сумма произведений значений случайной величины на вероятность этих значений.

Выборочным математическим ожиданием (выборочным средним) называют среднее арифметическое выборки. Математическое ожидание можно найти по одной из трех формул:

1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; 2) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i$; 3) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего. Дисперсия вычисляется по формулам:

1) $D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2$;   2) $D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 p_i$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию для примера 3, для этого вычислим среднее значения интервала:

x_i	116,5	119,5	122,5	125,5	128,5
p_i	0,125	0,333	0,25	0,167	0,125

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=14{,}5625+39{,}7935+30{,}625+20{,}9585+16{,}0625\approx 122..$$

Значит, среднее значение роста детей этой группы 122 см.

$$D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 p_i=(116{,}5-122)^2*0{,}125+(119{,}5-122)^2*0{,}333+(122{,}5-122)^2*0{,}25+$$
$$+(125{,}5-122)^2*0{,}167+(128{,}5-122)^2*0{,}125\approx 13{,}25$$

Следовательно, разброс значений роста около среднего значения составляет примерно 13 см.

Тема занятия №18: Медицинская статистика.

План:

1. **Санитарная (медицинская) статистика.**
2. **Статистическая совокупность, ее элементы, признаки.**
3. **Показатели деятельности ЛПУ.**

1. Санитарная (медицинская) статистика.

Санитарную статистику можно назвать одним из важнейших разделов социальной статистики, позволяющих сделать заключение о главном факторе развития страны – о здоровье населения, о безопасности среды обитания для здоровья человека.

Санитарная статистика в Статистическом словаре трактуется так: «отрасль социальной статистики, изучающая количественные характеристики состояния здоровья населения, развития системы здравоохранения, определяют степень интенсивности влияния на них социально - экономических факторов, а также занимается приложением статистических методов к обработке и анализу результатов клинических и лабораторных исследований».

Термин «санитарная статистика» употребляется довольно редко – чаще данная отрасль статистики называется «статистика здоровья и медицинского обслуживания населения».

В настоящее время в состав санитарной статистики входят показатели здоровья населения, здравоохранения, клинической статистики, состояния окружающей среды, характеризующие степень ее безопасности и позволяющие измерить ее влияние на здоровья человека.

В Статистическом словаре перечисляются и задачи санитарной статистики: «…своевременное получение и разработка данных о заболеваемости, смертности, инвалидности, физическом развитии населения в целом и отдельных его групп, о размещении, состоянии, оснащении, медицинских кадрах учреждений здравоохранения, клинических и лабораторных исследованиях». Санитарная статистика необходима для: подготовки федеральных и региональных программ медицинского обслуживания населения, страхования, развития социальной инфраструктура (строительства и реконструкции жилья, магазинов, клубов, стадионов, спортивных площадок и т.д.); программ по охране труда, жилищной программы, оказания социальной помощи и других социальных программ; популяризации здорового образа жизни; проведения мероприятий по обеспечению безопасности окружающей среды для человека и т.д.

Источниками данных санитарной статистики является: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; единовременные учеты, лабораторные и клинические выборочные и специальные обследования. Отдел статистики входит в структуру практически каждого лечебно – профилактического учреждения.

Государственная отчетность по здравоохранению позволяет количественно охарактеризовать состояния изменения здоровья населения.

Санитарная (медицинская) статистика является одной из основных отраслей статистической науки и важнейшим разделом социальной гигиены и организации здравоохранения.

В задачи санитарной статистики входит:

1) Определения уровня и сдвигов в здоровье отдельных групп населения;
2) Оценка влияния социально – биологических факторов на здоровье населения;
3) Анализ данных о сети, кадрах, деятельности лечебно – профилактических учреждениях (ЛПУ);
4) Определение эффективности лечебно – профилактических мероприятий;
5) Использование статистических методов в экспериментальных, клинико – биологических, социально гигиенических исследованиях.

Важнейшим принципом статистики является применение ее для изучения не единичных, а массовых явлений, объединенных в группы (совокупности) для выявления общих свойств и закономерностей. Эти закономерности, как правило, не могут быть обнаружены при наблюдении за единичными явлениями, а проявляются в массе наблюдений.

Основные разделы санитарной статистики (статистики здравоохранения):
1) статистика лечебно – профилактической помощи взрослому населению,
2) статистика службы охраны материнства и детства,
3) статистика санитарно – профилактической службы,
4) статистика медицинских кадров и т.д.

Источниками данных санитарной статистики являются: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; единовременные учеты; лабораторные и клинические выборочные и специальные обследования. Отдел статистики входит в структуру практически каждого ЛПУ. Государственная ответственность по здравоохранению позволяет количественно охарактеризовать состояния и изменения здоровья населения. Годовая отчетность лечебных и лечебно –профилактических организации независимо от организационно – правовой формы и формы собственности предоставляет данные об определенных категориях лиц, получающих медицинскую помощь, а также о работе учреждений системы здравоохранения и их обеспеченности кадрами. Кроме того, существует годовая отчетность, нацеленная на сбор данных по территориальным единицам. Например, «Отчет о числе заболеваний, зарегистрированных у больных, проживающих в районе обслуживания ЛПУ» (форма №12); «Отчет о санитарном состоянии района, города, области, края, республики» (форма №18); «Отчет о сети и деятельности медицинских учреждений» (форма №47); «Отчет ЛПУ» (форма № 30) «Листок учета движения больных» (форма №007 – У). Последние две формы отчетности составляются территориальными органами управлениями здравоохранения. Из периодической месячной отчетности следует выделить «Отчет об инфекционных и паразитических заболеваниях» (форма №1) и «Отчет о результатах исследования крови на СПИД» (форма №4). Статистическая отчетность непостоянна, она изменяется: вводятся новые формы, какие – то формы отменяются. Однако эти изменения не затрагивают основной объем информации и ее содержание. Обеспечивается преемственность собираемых данных и тем самым возможность анализа их изменений во времени. Получая информацию через статистическую отчетность, территориальные органы Министерства здравоохранения России и службы государственной статистики обобщают данные по населенным пунктам, городам, территориям, субъектам Федерации, рассчитывают сводные показатели, анализируют их изменения. Показатели включаются в статистические сборники и публикуются Госкомстатом России, региональными органами государственной статистики в средствах массовой информации.

2. Статистическая совокупность, ее элементы, признаки.

Статистическая совокупность – группа, состоящая из множества относительно однородных элементов (единиц наблюдения). (Например, группа оперированных, населения на участке, пациенты поликлиники, больные на дому и т.п.) единица наблюдения – каждое отдельное явление, подлежащее учету, наделенное признаком сходства.

В большинстве социально – гигиенических исследований учитываемыми признаками являются: пол, возврат, семейное положение, уровень образования, доход, размер жилплощади на одного человека, масса тела, рост, длительность пребывания в стационаре и др. (количественные признаки, выраженные числом). Различают также факторные и результативные признаки в зависимости от характера влияния: какой признак, на какой влияет (возраст – факторный признак, а рост - результативный).

3. Показатели деятельности ЛПУ.

Методами обработками медико-биологических исследований являются методы расчета средних и относительных величин.

Основные показатели, определяющие деятельность ЛПУ и ФАП:

- удельный вес посещений ЛПУ населением;
- охват населения целевыми осмотрами выявления туберкулёза;
- охват диспансерным наблюдением;
- среднегодовая занятость койки;
- средняя длительность пребывания больного на койке;
- оборот койки;
- больничная летальность и т.д.

Показатели деятельности медицинских учреждений позволяют проводить экономический анализ деятельности ЛПУ. Направления экономического анализа:

- Использование основных фондов.
- Эффективность использования коечного фонда.
- Эффективность использования медицинского оборудования.
- Оценка финансовых расходов и стоимости медицинской помощи.
- Эффективность использования медицинского и прочего персонала.

Основные фонды –совокупность произведенных общественным трудом материально-технических ценностей, используемых в течении длительного периода и утрачивающих стоимость по частям. Существует несколько классификаций: производственные и непроизводственные; по видам (группам) и т.д.

В совокупности основных видов выделяют активную и пассивную часть.

Активная часть - непосредственно воздействующая на продукт труда, определяет масштаб производства и уровень производительности работающих.

Пассивная часть – основные фонды, которые создают необходимые условия для процесса труда: здания, сооружения и т.д. Соотношение активной и пассивной части – величина переменная, зависящая от отрасли производства, ее технической оснащенности и других факторов. В здравоохранении России считается нормой доля активной части не менее 20 %.

Анализ использования основных фондов лечебного учреждения проводится по форме годового отчета №5 «Движение основных средств» (основные средства - это основные фонды в денежном выражении). Основные применяемые показатели:

Фондовооруженность труда персонала – показатель, характеризующий уровень технической оснащенности трудовых процессов, величину основных фондов на одного работающего.

Фондовооруженность медицинского персонала – рассчитывается по отношению к активной части основных фондов.

Фондоотдача – обобщающий показатель эффективности воспроизводства и использования основных фондов, выражается в натуральном и стоимостном выражении, отдельно для стационара и поликлиники.

В натуральном выражении определяется отношением числа пролеченных (госпитализированных стационара или обратившихся в поликлинику) к стоимости основных фондов (на 1000 руб.). в стоимостном выражении – затраты на содержание ЛПУ, приходящие на 1000 руб. основных фондов, однако данный показатель имеет меньшее значение.

Фондоемкость – стоимость основных производственных фондов на единицу объема производства продукции, величина, обратная фондоотдаче, отношение стоимости основных фондов стационара (поликлиники) к числу пролеченных на 1000 человек.

Обновление основных фондов – характеризуют три показателя: коэффициент накопления, коэффициент выбытия и коэффициент обновления. Эталон обновления 12 - 15 %.

Рентабельность основных фондов – это отношение прибыли к средне годовой стоимости основных фондов в рублях, выраженное в процентах.

Эффективность использования коечного фонда анализируется на основе следующих источников информации: «Отчет ЛПУ» (форма № 30) и «Листок учета движения больных» (форма № 007-у). используемые показатели:

- Оборот больничной койки – характеризуется численность больных, находившихся на больничной койки в течение года (для городских стационаров оптимально 17 – 20):

Число пролеченных больных / среднегодовое число коек.

- Функция больничной койки (Ф) – плановый показатель, отражающей возможность обслуживать одной койкой *Ф = Д / П*, где *Д* – среднегодовая занятость койки с учетом профиля*, П* – среднее число дней пребывание на койке.

- Среднегодовая занятость (работа) койки – определяется как отношение числа фактически проведенных больными койко-дней к среднегодовому числу больничных на коек.

Оценивается путем сравнения с нормативными показателями, которые зависят от социальности, уровня и типа ЛПУ (городское, сельское), мощности и других факторов. Оптимальная занятость койки определяется: $Д = \dfrac{365К}{К + 3\sqrt{К}}$, где Д – среднее число дней работы койки в году, К – среднегодовое число коек в стационаре.

Показатель может быть занижен по объективным причинам: вынужденный простой в связи с ремонтом, карантином и т.д. в этих случаях вычисляется **показатель работы функционирующей койки** по следующей схеме:

1) Расчет среднего числа коек, свернутых в течении года = число дней закрытия на ремонт / число календарных дней в году;

2) Определение числа коек, функционирующих в течении года = среднегодовое число коек – число коек, свернутых в течении года;

3) Расчет показателя койки с учетом закрытия на ремонт = число койко-дней, фактически проведенных больными / число функционирующих коек.

- Среднее время постоя койки – время от момента освобождения койки выписанным до занятия вновь поступившим (в связи с оборотом).

$T = \dfrac{365 - Д}{Ф}$, где Д – среднегодовая занятость койки данного профиля, Ф – функция койки данного профиля.

Простой койки оценивается путем сравнения с нормативным или определенным в качестве оптимального для данного учреждения. Среднее время простоя коек выше оптимального ведет к экономическому ущербу, менее (вплоть до отрицательного значения) – к перегрузке и нарушению санитарного режима.

- Выполнение плана койко-дней по стационару определяется в процентах как отношение числа фактически проведенных больными койко-дней к плановому числу койко-дней. Плановое число может определяться нормативом занятости койки в зависимости от профиля медицинской помощи и уровня ее оказания. В современных условиях объем деятельности в койко-днях часто планируется на основе задания ЛПУ по реализации программ государственных гарантий оказания населению бесплатной медицинской помощи.

- Средняя длительность пребывание больного в стационаре определяется как соотношение числа койко-дней, проведенных больных в стационаре, к числу пролеченных больных. Зависит от типа и профиля больницы, организации работы, интенсивности и качества лечебно-диагностического процесса.

Для анализа **эффективности использования медицинского оборудования** целесообразно использовать следующие показатели:

- Коэффициент календарного обслуживания –отношение времени возможного использования медицинской техники в соответствии с режимом работы ЛПУ к календарному числу дней в году (норматив – 0,9).

- Коэффициент сменности – числа фактических часов работы медицинской техники к числу максимально возможных часов работы медицинской техники по паспортным данным (норматив – 0,6).

При анализе **эффективности использования медицинского персонала** используют следующие показатели:

- Число медицинских работников на 1000 жителей (по врачам и среднему медперсоналу).

- Соотношение численности врачей и среднего медперсонала.

- Число медицинских работников на 100 коек стационара (по врачам и среднему медперсоналу).

- Производительность труда – доходы от реализации медицинских услуг к численности работающих, участвующих в получении этого дохода.

Показатели сравниваются в динамике за несколько лет и с другими однотипными учреждениями.

Оценка финансовых расходов и стоимости медицинской помощи – это важнейший компонент экономического анализа деятельности ЛПУ. Основными показателями являются структура финансовых расходов и себестоимость медицинских услуг, а также рентабельность деятельности. показатели удельного веса отдельных видов затрат (заработная плата, расходы на питание, на медикаменты) определяются общими методами в процентах. Показатель рентабельности рассчитывается как соотношение прибыли (дохода) от деятельности к общему объему реализации.

Тема занятия №19: Понятия о демографических показателях .

План:

1. **Медико-демографические показатели.**
2. **Перепись населения.**
3. **Численность и размещение населения.**

1. **Медико-демографические показатели.**

Демография (от греч. *dēmos* - народ и … графия) – наука о народонаселении, о закономерностях воспроизводства населения в общественно-исторической обусловленности этого процесса. По материалам статистики демография изучает воспроизводства населения в целом и его компоненты как массовые социальные процессы, их количественные взаимосвязи с возрастно-половой структурой населения, зависимости от социальных и экономических явлений, характер взаимодействия роста населения с общественным развитием. Применяя статистические, математические и, собственно, демографические методы, разрабатываются теория воспроизводства населения, демографические прогнозы, обосновывается демографическая политика страны.

Основными медико-демографическими показателями является рождаемость, смертность, естественный прирост населения.

Коэффициентом (или показателем) рождаемости называют число родившихся за год, приходящееся на 1000 населения. **Коэффициентом общей смертности** служит количество умерших за год на 1000 населения.

Естественный прирост населения можно установить лишь при одновременном изучении рождаемости и смертности в их взаимной связи. **Показатель естественного прироста** определяется путем вычисления разности между показателями рождаемости и смертности населения.

Показатели измеряются в промилле (тысячная часть), обозначаются %.

По оценке Федеральной службы государственной статистики (Росстата), численность постоянного населения Российской Федерации на 1 августа 2009 г. составляла 141,9 млн человек и с начала года уменьшилась на 31,5 тыс. человек или на 0,02%, а на соответствующую дату предыдущего года – 125,1 тыс. человек, или на 0,09%.

1 октября 2009 г. стало известно, что Росстат, в ходе подготовки отложенной переписи 2010 г., обнаружил, что текущая численность населения России может составить 140 млн человек, что на 2 млн меньше расчетной цифры. По обнародованным в начале октября того же года данным доклада программы развития ООН страна, населения которой сократилась на 6,6 млн человек с 1993 г., потеряет к 2025 г. еще 11млн.

Согласно ежегодному Докладу Фонда ООН в области народонаселения за 2004 г., в России продолжается демографический кризис.

Рост населения в стране прекратился с 1991 г. (рождаемость в РСФСР упала ниже уровня простого замещения поколений еще в 1960-е гг.). смертность в 1,5 раза превышает рождаемость, население сокращается на несколько сотен тысяч человек ежегодно.

Негативной особенностью Росси является тот факт, что в результате развития здравоохранения компенсировалась с 1960-х гг. ростом алкогольной смертности.

Алкогольная смертность в России (600 – 700 тыс. человек в год) связана с самым высоким в мире уровнем потребления легальных и нелегальных алкогольных напитков. Она покрывает с собой большую часть разрыва между рождаемостью и смертностью, обусловливающего депопуляцию России.

Этому мнению никак не противоречит мнение некоторых других демографов, которые считают что высокая смертность связана с незавершенностью процессов модернизации России, включая социокультурный аспект. В частности, забота о собственном здоровье не является высокой ценностью в рамках менталитета существенной части населения, что предопределяет высокую алкоголизацию, смертность от несчастных случаев (включая ДТП), аномальную распространенность ряда болезней и др.

Сокращение численности населения несколько сдерживается иммиграцией, в первую очередь этнических русских и русскоязычных из стран СНГ (Казахстан, Средняя Азия и Закавказье), однако к настоящему времени эти резервы сокращаются. Россия не смогла в полной мере воспользоваться благоприятной конъюнктурой и стремлением соотечественников вернуться в Россию (во многом из-за негибкой иммиграционной политики).

2. Перепись населения.

Перепись населения – это организация сбора, обработки и публикации демографических, экономических и социальных данных обо всем населении, проживающем в определенный момент времени в стране.

Принципы переписи:

1. Всеобщность охвата населения.
2. Непосредственное получение сведений от населения путем опроса конкретных лиц.
3. Самоопределение людей при ответах на вопросы, т.е. перепись проводится только по ответам самих опрашиваемых, без предъявления ими документов.
4. Конфиденциальность сообщаемых населением сведений.

Точность и сопоставимость всех данных, полученных при переписи, обеспечиваются:

1) проведением переписи по единой программе и правилам на всей территории страны;

2) сбором сведений на одну дату, на одно и то же точное время – момент счета населения;

3) результаты переписи публикуются только в виде свободных таблиц (принцип конфиденциальности).

По данным переписи населения 2002 г. численность населения России с 1989 по 2002 г. упала на 2,8 млн. В настоящее время каждую минуту в Росси рождаются 3 человека, а умирают – 4. Общемировая тенденция противоположна: отношение количества рождений к смертям равно 2,6. Особенно велика смертность у российских мужчин, средняя продолжительность жизни которых 61,4 года, что связано, в частности, с высоким уровнем потребления крепких алкогольных напитков, большим количеством несчастных случаев, убийств и самоубийств. Продолжительность жизни женщин значительно выше – 73,9 года. Уровень рождаемости в Росси не обеспечивает простого воспроизводства населения.

3. Численность и размещение населения.

По данным Всероссийской переписи населения, проведенной по состоянию на 14 октября 2010 года, численность постоянного населения Российской Федерации составила 142,9 млн человек.

При переписи было 90 тыс. граждан Российской Федерации, находящихся на дату переписи за рубежом в связи длительной служебной командировкой по линии органов государственной власти и проживающих с ними членов их домохозяйств (в 2002 г. 107 тыс.).

Кроме того, при переписи было учтено 489 тыс. человек, (менее 1 года) находившихся на территории Российской Федерации и постоянно проживающих за рубежом (в 2002 г. – 239 тыс. человек).

Российская Федерация занимает восьмое место в мире по численности населения после Китая (1335 млн. чел.), Индии (1210 млн. чел.), США (309 млн. чел.), Индонезии (238 млн. чел.), Бразилии (191 млн. чел), Пакистана (165 млн. чел.), и Бангладеш (147 млн. чел).

По сравнению с переписью населения 2002 г. численность населения уменьшилась на 2,3 млн. человек, в том числе в городских населенных пунктах – на 1,1 млн. человек, в сельской местности – на 1,2 млн. человек.

Соотношение горожан и сельских жителей составило в 2010 г. 74 и 26 % соответственно.

Население Российской Федерации проживает в 2386 городских населенных пунктах (городах и поселках городского типа) и 134 тыс. сельских населенных пунктах.

В городах проживает 93% городского населения (в 2002 г. – 90%), остальное городское население живет в поселках городского типа.

За межпереписной период число сельских населенных пунктов уменьшилось на 8,5 тыс. сел и деревень. Это произошло за счет включения сельских населенных пунктов в черту городов и поселков городского типа, а также ликвидации по решениям местных органов власти в связи естественной убылью и миграционным оттоком населения в другие населенные пункты. Вместе с тем при переписи было зафиксировано 19,4 тыс. сельских населенных пунктов, в которых население фактически не проживало. По сравнению с прошлой переписью число таких населенных пунктов увеличилось на 48%.

Тема занятия №20: Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала.

План:

1. Определения процента. Расчет процентной концентрации растворов.
2. Составление и решение пропорций.
3. Газообмен легких. Показатели сердечной деятельности.
4. Расчет прибавки роста и массы детей.
5. Способы расчета питания (объемный и калорийный метод).
6. Оценка пропорциональности развития ребенка используя астрометрические индексы.

1. <u>Определения процента. Расчет процентной концентрации растворов</u>.

Процентом (от латинского pro cento-с сотни) называется сотая часть. Запись 1% означает 0,01; 27%=0,27; 100%=1;150%=1,5 и т.д.

Чтобы найти процентное выражение данного числа, нужно умножить это число на 100 (или, что одно и то же, перенести в нем запятую на 2 знака вправо)

Примеры: процентное выражение числа 2 есть 200%; числа 0,357есть 35,7%; числа 1,753 есть 175,3%

Чтобы найти число по его процентному выражению, нужно разделить процентное выражение на 100 (или, что одно и тоже, перенести запятую через 2 знака влево)

Примеры: 13,5%=0,135; 2,3%=0,023; 145%=1,45

Расчет процентной концентрации растворов (в различных объемах жидкости)

Три основные математические задачи на проценты таковы.

Задача 1. найти указанный процент данного числа.

Данное число делится на 100, и полученный результат умножается на число процентов.

Пример: в отделении за сутки в среднем расходуется 0,5 кг хлорной извести. Во время генеральной уборки помещений было израсходовано 153% среднесуточного количества хлорной извести. Сколько хлорной извести израсходовал персонал отделения во время генеральной уборки помещения?

Решение:

1)0,5кг:100%=0,005

2)0,005. 153%=0,765 кг

Ответ: за сутки во время генеральной уборки израсходовано 0,765 кг хлорной извести.

Задача №2 найти число по данной величине указанного его процента.

Данная величина делится на число процентов, и результат умножается на 100.

Пример:

Вес хлорной извести в растворе составляет 10%. Сколько потребуется воды для разведения раствора, если известно, что хлорной извести взяли 0,2кг?

Решение:

1)0,2:10= 0,02

2)0,02. 100=2л

Ответ : потребуется 2л.

Задача №3 найти выражение одного числа в процентах другого.

Умножаем первое число на 100; результат делим на второе число.

Пример: за сутки в отделение израсходовано 765 г хлорной извести вместо среднесуточной нормы расхода 500г. На сколько процентов больше израсходовано хлорной извести?

Решение:

1) 765-500=265
2) 265.100=26500
3) 26500:500=53

Ответ: на 53% больше израсходовано хлорной извести за сутки.

По определению концентрации чистого вещества в растворе - это количество граммов в 100мл. следовательно, для расчета количества вещества в 1 мл раствора необходимо имеющуюся массу чистого вещества в растворе разделит на 100.

2.Составление и решение пропорций

Дробное число записывается двумя натуральными числами, разделенными чертой, в виде $\frac{a}{b}$. Такие записи называются обыкновенными дробями. Число a, записанное над чертой называется числителем дроби, число ***b*,** записанное под чертой называется знаменателем дроби.

Знаменатель дроби показывает, на сколько равных частей разделена единица.

Числитель дроби показывает, сколько таких частей взято.

Пример1. обыкновенная дробь $\frac{4}{5}$ показывает, что целое разделено на 5 равных частей и взято 4 таких части.

Например, чтобы дать больному $\frac{1}{4}$ часть таблетки, нужно таблетку разделить на 4 равные части и взять 1 часть.

Если частное двух чисел называют отношением этих чисел, то равенство двух отношений называется пропорцией. С помощью переменных пропорцию записывают так.

$a{:}b = c{:}d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где *a и d* крайние; *c и b*- средние члены. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов – это является основным свойством пропорции.

Пропорции 20:16=5:4 верно, так как 20*4*=16*5=80. поменяем местами в этой пропорции средние члены. Получим новую пропорцию 20:5=16:4. она тоже верна, если в верной пропорции поменять местами средние члены и крайние члены, то получившаяся новая пропорция тоже верна.

Позже суточное количество молока рассчитывают объемным методом: от 2 недель до 2 месяцев оно составляет $\frac{1}{5}$ долженствующей массы тела, от 2 месяцев до 4 месяцев $\frac{1}{6}$, от 4 месяцев до 6 месяцев $\frac{1}{7}$. После 6 месяцев суточный объем составляет не более 1 л (разовый 200мм). Для определения разовой потребности в пищи суточный объем пищи делят на число кормлений.

3.Газообмен в легких. Показатели сердечной деятельности.

Вентиляция легких осуществляется благодаря вдоху и выдоху. Тем самым в альвеолах поддерживается относительно постоянный газовый состав. Человек дышит атмосферным воздухом с содержанием кислорода (20,9 %) и содержанием углекислого газа (0,03 %), а выдыхает воздух, в котором кислорода 16,3 %, углекислого газа – 4 %. В альвеолярном воздухе кислорода – 14,2 %, углекислого газа – 5,2 %. Повышенное содержание углекислого газа в альвеолярном воздухе объясняется тем, что при выдохе к альвеолярному воздуху примешивается воздух, который находится в органах дыхания и в воздухоносных путях. У детей более низкая эффективность легочной вентиляции выражается в ином газовом составе как выдыхаемого, так и альвеолярного воздуха. Чем моложе ребенок, тем больше процент кислорода и тем меньше процент углекислого газа в выдыхаемом и альвеолярном воздухе, т. е. кислород, используется детским организмом менее эффективно. Поэтому детям для потребления одного и того же объема кислорода и выделения одного и того же объема углекислого газа нужно гораздо чаще совершать дыхательные акты. В легких кислород из альвеолярного воздуха переходит в кровь, а углекислый газ из крови поступает в легкие. Движение газов обеспечивает диффузия. Согласно законам диффузии газ распространяется из среды с высоким парциальным давлением в среду с меньшим давлением. Парциальное давление – это часть общего давления, которая приходится на долю данного газа в газовой смеси. Чем выше процентное содержание газа в смеси, тем выше его парциальное давление. Для газов, растворенных в жидкости, употребляют термин «напряжение», соответствующий термину «парциальное давление», применяемому для свободных газов. В легких газообмен совершается между воздухом, содержащимся в альвеолах, и кровью. Альвеолы оплетены густой сетью капилляров. Стенки альвеол и стенки капилляров очень тонкие. Для осуществления газообмена определяющими условиями являются площадь поверхности, через которую осуществляется диффузия газов, и разности парциального давления (напряжения) диффундирующих газов. Легкие идеально соответствуют этим требованиям: при глубоком вдохе альвеолы растягиваются и их поверхность достигает 100–150 кв. м (не менее велика и поверхность капилляров в легких), существует достаточная разница парциального давления газов альвеолярного воздуха и напряжения этих газов в венозной крови. Связывание кислорода кровью. В крови кислород соединяется с гемоглобином, образуя нестабильное соединение – оксигемоглобин, 1 г которого способен связать 1,34 куб. см кислорода. Количество образующегося оксигемоглобина прямо пропорционально парциальному давлению кислорода. В альвеолярном воздухе парциальное давление кислорода равняется 100–110 мм рт. ст. При этих условиях 97 % гемоглобина крови связывается с кислородом. В виде оксигемоглобина кислород от легких переносится кровью к тканям. Здесь парциальное давление кислорода низкое, и оксигемоглобин диссоциирует, высвобождая кислород, что обеспечивает снабжение тканей кислородом. Наличие в воздухе или тканях углекислого газа уменьшает способность гемоглобина связывать кислород. Связывание углекислого газа кровью. Углекислый газ переносится кровью в химических соединениях гидрокарбоната натрия и гидрокарбоната калия. Часть его транспортируется гемоглобином. В капиллярах тканей, где напряжение углекислого газа высокое, происходит образование угольной кислоты и карбоксигемоглобина. В легких карбоангидраза, содержащаяся в эритроцитах, способствует дегидратации, что приводит к вытеснению углекислого газа из крови. Газообмен в легких у детей тесно связан с регуляцией кислотно-щелочного равновесия. У детей дыхательный центр очень чутко реагирует на малейшие изменения рН-реакции крови. Поэтому даже при незначительных сдвигах равновесия в сторону подкисления у детей возникает одышка. По мере развития диффузионная способность легких увеличивается из-за увеличения суммарной поверхности альвеол. Потребность организма в кислороде и выделение углекислого газа зависит от уровня окислительных процессов, протекающих в организме. С возрастом этот уровень снижается, а значит, величина газообмена на 1 кг массы по мере роста ребенка уменьшается.

Жизненная ёмкость лёгких (ЖЕЛ)-максимальное количество воздуха, выдыхаемое после самого глубокого вдоха. ЖЕЛ является одним из основных показателей состояния аппарата внешнего дыхания, широко используемым в медицине.

Вместе с остаточным объемом, т.е. объемом воздуха, остающегося в легких после самого глубокого выдоха, ЖЕЛ образует общую емкость легких (ОЕЛ). В норме ЖЕЛ составляет около 3/4 общей емкости легких и характеризует максимальный объем, в пределах которого человек может изменять глубину своего дыхания. При спокойном дыхании здоровый взрослый человек использует небольшую часть ЖЕЛ: вдыхает и выдыхает 300–500 мл воздуха (так называемый дыхательный объем). При этом резервный объем вдоха, т.е. количество воздуха, которое человек способен дополнительно вдохнуть после спокойного вдоха, и резервный объем выдоха, равный объему дополнительно выдыхаемого воздуха после спокойного выдоха, составляет в среднем примерно по 1500 мл каждый. Во время физической нагрузки дыхательный объем возрастает за счет использования резервов вдоха и выдоха. максимальный объём воздуха, выдыхаемого после самого глубокого вдоха (у мужчин 3,5-4,5 литра, у женщин в среднем на 25% меньше); под влиянием тренировки увеличивается до 6-7 литров.

Показатели сердечной деятельности.

Показателями работы сердца являются систолический и минутный объем сердца. Систолический, или ударный, объем сердца–это количество крови, которое сердце выбрасывает в соответствующие сосуды при каждом сокращении. Величина систолического объема зависит от размеров сердца, состояния миокарда и организма. У взрослого здорового человека при относительном покое систолический объем каждого желудочка составляет приблизительно 70–80 мл. Таким образом, при сокращении желудочков в артериальную систему поступает 120–160 мл крови.

Минутный объем сердца – это количество крови, которое сердце выбрасывает в легочный ствол и аорту за 1 мин. Минутный объем сердца – это произведение величины систолического объема на частоту сердечных сокращений в 1 мин. В среднем минутный объем составляет 3-5 л.

Систолический и минутный объем сердца характеризует деятельность всего аппарата кровообращения.

Частота сердечных сокращений за мин.

Возраст, годы	Количество сердечных сокращений в 1 мин
Новорожденные	120–140
До 5	130
5–10	88
10–15	78
15–60	68-72

Для каждой возрастной группы имеются свои нормы показателей давления. Так, у зрелого новорожденного ребенка систолическое давление составляет 65-85 мм рт. ст

Показатели максимального (систолического) артериального давления у детей первого года рассчитывают по формуле:

$76+2n$, где n-число месяцев.

Показатели максимального систолического) артериального давления у детей старших возрастных групп рассчитывают по формуле:

$100+n$, где n число лет.

Минимальное (диастолическое) давление, как правило, составляет $1/2$ от максимального (систолического) давления.

4. <u>Расчет прибавки роста и массы детей.</u>

Рассчитать долженствующую массу детей до года можно по следующей формуле.

$М_д = М_0 +$ месячные прибавки, где $М_0$ - вес при рождении.

Месячные прибавки составляют

1мес- 600г.

2мес- 800г.

3мес-800г.

Четвертый и каждый последующие месяцы на 50 гр меньше предыдущего, в среднем к году масса ребенка составляет 10 -11 кг.

Задача: Ребенок родился массой 2700г, в настоящее время ему 6 месяцев. Рассчитать какую массу должен иметь ребенок.

Решение: Используя формулу $М_д = М_0 +$ месячные прибавки, вычислим

$М_д$ = 2700+(600+800+750+700+650)=7 кг. Ребенок должен в среднем иметь 7 кг.

Физическое развитие детей

Наиболее наглядно и просто можно оценивать развитие ребенка по его антропометрическим показателям.

Антропометрические измерения были введены в медицину в 30-х годах XIX столетия.

Основными антропометрическими показателями являются:

- Масса тела
- Длина тела
- Окружность головы
- Окружность груди

<u>Масса тела</u>

Минимальная масса доношенного ребенка 2500 г. Прибавка в массе до года:

1 месяц-600г |
2 месяц-800 г | 2200 г
3 месяц-800 г |

4 месяц-750 г |
5 месяц-650 г | 2100 г
6 месяц-650 г |

7 месяц-600 г |

8 месяц-550 г | 1650 г
9 месяц-500 г |

10 месяц-450 г |
11 месяц-400 г |1200 г
12 месяц-350 г |

Можно использовать формулу:
М=масса при рождении+700*П, Где П-число мес. В течение первого полугодия
Для второго полугодия:
М = масса при рождении+(700*6) +500*(П-6), где П-возраст в месяцах
700-ежемесячная прибавка массы в течении первого полугодия.
500-в течение второго полугодия

После года лучше использовать центильные таблицы. Можно пользоваться формулой:

5 лет М=20 кг -2 кг +3 кг

т.е. на каждый недостающий до 5 лет год отнимать от 20 кг по 2 кг, а на каждый последующий после 5 лет год – прибавлять по 3 кг.

<u>Длина тела</u> до 2-х лет измеряется горизонтальным ростомером, затем вертикальным.
Минимальная длина тела доношенного новорожденного 45 см
Прибавка длины тела на первом году жизни:
1-3 мес – по 3,0 см (3,0 см)
4-6 мес – по 2,5 см (7,5 см)
7-9 мес – по 2,0 см (6,0 см)
10-12 мес – по 1,0 (3,0 см)

После года длину тела лучше определять по центильным таблицам.
Можно использовать формулу:

5 лет Р = 110 см -8 см +6 см

т.е. на каждый недостающий до 5 лет год отнимать от 110 см по 8 см, а на каждый последующий после 5 лет год – прибавлять по 6 см.
Первый период вытяжения наблюдается у ребенка в возрасте 5-6 лет, второй в возрасте 11-12 лет.

<u>Окружность головы.</u> При рождении 34-36 см. На первом году жизни ежемесячная прибавка 1 см.

<u>Окружность груди.</u> При рождении 32-34 см. На первом году жизни ежемесячная прибавка $\approx$1,2 см.

Калорийный метод расчета питания при естественном вскармливании
1 четверть - 125-130кл
2 четверть - 120-125кл

3 четверть - 115-120кл
4 четверть - 110-115кл

В 1л женского молока имеется 700кл при смешанном кормлении и искусственном вскармливании количество калорий должно быть на 15% больше чем при грудном.

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1.Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. / Е.В. Филимонова. – 2-е изд., доп. и перераб. – Ростов-на- Дону.: Феникс, 2008.

2. Михеев В.С., Стяжкина О.В., Шведова О.М. Математика: Учебное пособие для среднего профессионального образования. / В.С.Михеев. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2009.

Дополнительные источники:

1. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средних учебных заведений. / Н.В. Богомолов. – 7-е изд. М.: Высшая школа, 2004.- 495 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике./ Д.Т. Письменный . 1 часть. – 4-е изд., испр.- Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2004.

3. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О., Соколов В.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – Форум, 2011. – 240 с.

4. Гилярова М.Г. Математика для медицинских колледжей. – Феникс 2013г

Интернет-ресурсы:

www.slovari.yandex.ru

www.wikiboks.org

revolution.allbest.ru